対数の定義とその性質

$a > 0, a \neq 1$ とする．指数関数 $y = a^x$ の単調増加（減少）性から，$y > 0$ の値を 1 つ定めると，それに応じて，x の値が 1 つ定まる．この事実から，次のように対数を定義できる．

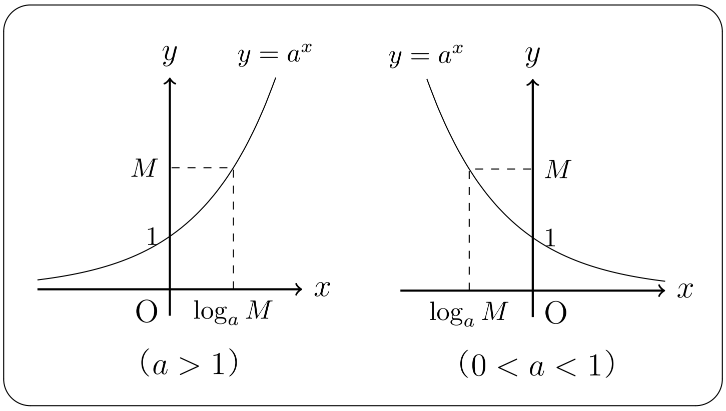
定義. 正の実数 M に対して，

$$M = a^p$$

を満たす実数 p が，ただ 1 つ定まる．この p を a を**底**とする M の**対数**といい，

$$\log_a M$$

と表す．また，M をこの対数の**真数**という．



注意. 対数 $\log_a M$ の定義から，真数 M は必ず正の実数である．

対数の定義から次が成り立つ．

> $a > 0, a \neq 1, M > 0$ とする．このとき次が成り立つ．
>
> $$a^p = M \iff p = \log_a M$$

例. 2 を底とする 8 の対数 $\log_2 8$ の値は，$2^3 = 8$ が成り立つことから，$\log_2 8 = 3$ と求められる．

特に，指数の定義と対数の定義から，次が成り立つ．

> $a > 0$，$a \neq 1$ に対して，次が成り立つ．
>
> $$\log_a a = 1, \qquad \log_a 1 = 0, \qquad \log_a \frac{1}{a} = -1.$$

証明. それぞれ，次のように確認できる．

$$\begin{aligned} a^1 = a \quad &\iff \quad 1 = \log_a a, \\ a^0 = 1 \quad &\iff \quad 0 = \log_a 1, \\ a^{-1} = \frac{1}{a} \quad &\iff \quad -1 = \log_a \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

□

例.

- 5 を底とする $\frac{1}{25}$ の対数は，$\log_5 \frac{1}{25} = -2$ である．これは，

  $$5^{-2} = \frac{1}{25} \iff -2 = \log_5 \frac{1}{25}$$

  であることから確認できる．

- 3 を底とする $\sqrt{3}$ の対数は，$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ である．これは，

  $$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \iff \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{3}$$

  であることから確認できる．

指数法則から，次の性質が導かれる．

命題． a, b, c を 1 でない正の実数，M, N を正の実数，k を実数とするとき，次が成り立つ．

- $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a M^k = k \log_a M$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

証明. $p = \log_a M$，$q = \log_a N$ とすると，対数の定義から，次が成り立つ．

$$a^p = M, \qquad a^q = N. \tag{1}$$

- これらの両辺を掛け合わせることで，
$$MN = a^p a^q = a^{p+q}$$
が成り立ち，この等式に再び対数の定義を適用することで，
$$\log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$$
が従う．

- 再び (1) 式から，
$$\frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$
が成り立ち，上と同様に，この等式に対数の定義を適用することで，
$$\log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$$
が従う．

- さらに (1) 式の両辺を k 乗することで，等式
$$M^k = (a^p)^k = a^{kp}$$
が得られる．これまでと同様に，この等式に対数の定義を適用することで，
$$\log_a M^k = kp = k \log_a M$$
が従う．

- $r = \log_a b$ とすると，対数の定義から，$a^r = b$ が成り立つ．両辺の c を底とする対数をとることで，
$$\log_c a^r = \log_c b \quad \Longleftrightarrow \quad r \log_c a = \log_c b \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$
が成り立つ．以上から，
$$\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$
が従う．

□

補足． 上の命題の最後の公式は，その形から**底の変換公式**と呼ばれる．対数の計算においては，底をそろえることが基本的となるので，この公式は重要である．