## 合成関数の微分

関数の連続性に関する次の重要な事実を思い出す．

- 2 つの連続関数の合成関数はまた連続関数である．
- 微分可能な関数は，連続関数である．

これらの結果を用いて，2 つの微分可能な関数の合成関数はまた微分可能であることを証明し，その導関数の公式を導く．

**合成関数の微分可能性**

**命題.** $y = f(x)$，$x = g(u)$ の定義域をそれぞれ，$I$，$J$ とし，任意の $b \in J$ に対して，$g(b) \in I$ が成り立っているとする．$y = f(x)$，$x = g(u)$ がともに微分可能であるとき，合成関数 $y = f(g(u))$ も微分可能であり，その導関数について，

$$\{f(g(u))\}' = f'(g(u)) \cdot g'(u) \quad \text{すなわち，} \quad \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du}$$

が成り立つ．

証明. $u$ の関数 $h(u)$ を $h(u) = f(g(u))$ とする．任意に $b \in J$ をとり，

$$h'(u) = \lim_{u \to b} \frac{h(u) - h(b)}{u - b} = f'(g(b)) \cdot g'(b)$$

を示せば良い．$a = g(b) \in I$ とおく．$I$ で定義される関数 $F(x)$ を次のように定める：

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & (x \neq a), \\ f'(a) & (x = a). \end{cases}$$

$f(x)$ が微分可能であるという仮定から，この $F(x)$ の定義は正当であり，さらに，

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = F(a)$$

が成り立つことから，$F(x)$ は，$x = a$ で連続である．$x = g(u)$ は，$u = b$ で微分可能なので，連続であり，$F(x)$ の連続性と合わせて，$F(g(u))$ は $u = b$ で連続である．よって，次が成り立つ．

$$\lim_{u \to b} F(g(u)) = F(g(b)) = F(a) = f'(a) = f'(g(b)). \tag{1}$$

$F(x)$ の定義から，$a$ の近くの $x$ に対して，$f(x) - f(a) = F(x)(x - a)$ が成り立つ．これに，$x = g(u)$，$a = g(b)$ を代入して，

$$f(g(u)) - f(g(b)) = F(g(u))(g(u) - g(b))$$

を得る．これと，(1) 式から，

$$\lim_{u \to b} \frac{h(u) - h(b)}{u - b} = \lim_{u \to b} \frac{f(g(u)) - f(g(b))}{u - b} = \lim_{u \to b} F(g(u)) \cdot \lim_{u \to b} \frac{g(u) - g(b)}{u - b} = f'(g(b)) \cdot g'(b)$$

が成り立つ．よって結果が従う． □

**補足.** 上の証明は，大雑把に言って，$u \to b$ のとき，$x = g(u) \to g(b) = a$ なので，

$$\lim_{u \to b} \frac{f(g(u)) - f(g(b))}{u - b} = \lim_{u \to b} \frac{f(g(u)) - f(g(b))}{g(u) - g(b)} \cdot \lim_{u \to b} \frac{g(u) - g(b)}{u - b} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{u \to b} \frac{g(u) - g(b)}{u - b}$$

ということである．しかし，極限 $u \to b$ をとる前に，$g(u) = g(b)$ となる可能性があるので[1]，上のように厳密な議論が必要になるのである．

[1] $\lim\limits_{x \to a}$ の定義は，「$x$ が $a$ と異なる値をとりながら限りなく $a$ に近づく」であった．