逆関数の微分

逆関数の導関数についての公式を導くがその前にまず逆関数の存在について復習する．

補題. $y = f(x)$ を I 上で定義された関数し，その値域を V とする．任意の $a_1, a_2 \in I$ に対して，

$$f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2 \tag{1}$$

が成り立つなら，V を定義域とする $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在する．

証明. 関数 $y = f(x)$ の値域が V であることから，任意の $b \in V$ に対して，$f(a) = b$ を満たす $a \in I$ が存在する．また仮定から，このような a は一意的に定まる：なぜならば，もし 2 つの異なる $a_1, a_2 \in I$ がともに，$f(a_1) = b$，$f(a_2) = b$ を満たすとすると，このとき，$f(a_1) = f(a_2)$ なので，仮定から，$a_1 = a_2$ となるからである．以上から，関数

$$V \to I \quad ; \quad b \mapsto a$$

を定めることができ，これが $y = f(x)$ の逆関数である． □

補足. 上の補題における (1) 式の仮定は，単射性と呼ばれる．微分可能な関数が単射であるとは，狭義単調増加または狭義単調減少[1] ということである．

定義. 関数 $y = f(x)$ において，定義域の部分集合 I に対して，

$$V := \{y = f(x) \mid x \in I\}$$

を関数 $f(x)$ における I の像といい，V を $f(I)$ とかく．[2]

逆関数の微分法

関数 $y = f(x)$ が，I 上で単射であり微分可能である[a] とする．さらに，全ての $x \in I$ に対して，$f'(x) \neq 0$ であれば，逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は $f(I)$ で微分可能であって，次が成り立つ．

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{すなわち，} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

[a]つまり狭義単調増加または狭義単調減少である．

証明. 関数 $y = f(x)$ は単射なので，任意の $b \in f(I)$ に対して，$b = f(a)$ を満たす $a \in I$ が一意的に存在する．また，$y \to b$ のとき，$x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$ である．これから，

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

が成り立つ．$b \in V$ は任意だったので，$f^{-1}(y)$ は $f(I)$ で微分可能であり，$\dfrac{d}{dy} f^{-1}(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ が成り立つ． □

例. 逆関数の微分法を用いて，関数 $x = \sqrt{y}$ の導関数を求めよう．
関数 $y = x^2$ を考える．$y = x^2$ は，$I := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ で微分可能であり狭義単調増加である[3] ．さらに全ての $x \in I$ に対して，$\frac{dy}{dx} = 2x \neq 0$ が成り立つ．よって，逆関数 $x = \sqrt{y}$ は $f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ で微分可能であって，その導関数は，次のように求められる：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

[1]狭義単調増加（減少）とは，$a_1 < a_2$ のとき，$f(a_1) < f(a_2)$ （$f(a_1) > f(a_2)$）が成り立つことをいう．
[2]I が定義域全体のときは，$f(I)$ は値域である．
[3]$y = x^2$ 自体は，実数全体で微分可能であるが，今は $x = \sqrt{y}$ を考えたいので，このような I を考えている．