指数関数の導関数

a を，$a > 0, a \neq 1$ である実数とする．a を底とする指数関数 $y = a^x$ の導関数を求めよう．証明の前に，自然対数の底[1]の定義

$$e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

を思い出す．これに基いて，次の公式が導かれる．

指数関数の導関数

- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \log a \qquad (a > 0, a \neq 1)$

証明. $y = a^x$ とおいて，対数微分法を用いる．任意の x に対して，$y = a^x > 0$ であることに注意して，両辺の対数を取ると，$\log y = x \log a$ を得る．両辺を x で微分する[2] ことにより，

$$\frac{y'}{y} = \log a \iff y' = y \log a = a^x \log a$$

が従う．さらに $a = e$ のときを考えると，$\log e = 1$ から，$(e^x)' = e^x$ も従う． □

…………………………………………………………………………………………

指数関数 e^x の導関数がまた e^x であることについて考察する．そもそも自然対数の底 e とは，微分しても形が変わらない指数関数の底の値として考えられたものである．すなわち，$f(x) = a^x$ であって，

$$f'(x) = f(x) \tag{1}$$

を満たすような実数 a 値を e と定めたのである．この定義によれば，e^x の導関数がまた e^x となることは定義から明らかであるが，本当にそのような e が存在するのであろうか．

$f(x) = a^x$ とする．導関数の定義から，

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \tag{2}$$

なので，等式 (1) を満たすことと，

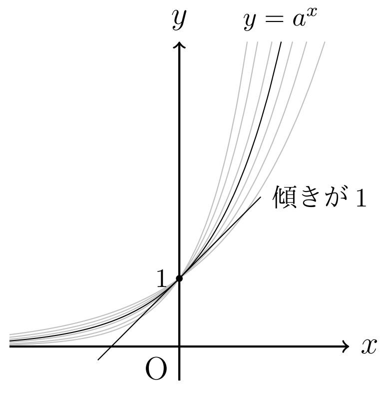
$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1 \tag{3}$$

であることは必要十分である．よって，等式 (3) を満たすような a の値が存在すれば良いが，これは次のように考えられる．

等式 (3) の左辺は，(2) 式に $x = 0$ を代入することで，

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

であることがわかる．つまり，等式 (3) は，$f'(0) = 1$ すなわち，曲線 $y = a^x$ の $x = 0$ における接線の傾きが 1 である事を示しており，このような実数 a が存在することは，右図から明らかである．このようにして，自然対数の底 e が定義できるのである．



注意. 等式 (1) で定義される e と，本稿の最初に紹介した定義における e が同じものであるというのは，明らかではない．この 2 つの定義の同値性については，「ネイピア数の 2 つの定義[3] 」を参照してほしい．

[1]ネイピア数とも呼ばれる．
[2]陰関数の微分を用いていることに注意する．
[3]https://gleamath.com/Napiers-constant01