導関数の公式

導関数の定義 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ から，次の基本的な公式を証明する．

導関数の公式

関数 $f(x), g(x)$ が微分可能であるとき，次が成り立つ．ただし，k は実定数とする．

1. （定数の微分） $\{k\}'=0$
2. （定数倍の微分） $\{kf(x)\}'=kf'(x)$
3. （和の微分） $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$
4. （積の微分） $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
5. （商の微分） $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

証明. 1. $\{k\}'=\lim_{h\to 0}\dfrac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$

2. $\{kf(x)\}'=\lim_{h\to 0}\dfrac{kf(x+h)-kf(x)}{h}=k\cdot\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=kf'(x)$

3.
$$\begin{aligned}\{f(x)+g(x)\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\{f(x+h)-f(x)\}+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}g(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&=g(x)f'(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

5. まず，$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=\dfrac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ を示す．$F(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ とおく．微分の定義から，

$$\begin{aligned}F'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)g(x+h)}\right\}\\&=-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}=-g'(x)\cdot\frac{1}{\{g(x)\}^2}\end{aligned}$$

が従う．最後に，$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\{f(x)F(x)\}'$ なので，積の微分の公式を用いることで，

$$\{f(x)F(x)\}'=f'(x)F(x)+f(x)F'(x)=\frac{f'(x)}{g(x)}+\frac{-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

となり，結果が従う．

□

導関数の公式

実数 k に対して，$\{x^k\}' = kx^{k-1}$ が成り立つ．

証明．k が自然数，整数，有理数，実数のときを順々に証明していく．

- k が自然数のとき，
  数学的帰納法を用いて証明する．$k=1$ のとき，
  $$(\text{左辺}) = \{x\}' = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1, \qquad (\text{右辺}) = 1\cdot x^0 = 1$$
  より成り立つ．$k=t$ のとき，$\{x^t\}' = tx^{t-1}$ が成り立つと仮定し，$k=t+1$ のときを考える．仮定と積の微分の公式から，左辺は，
  $$\{x^{t+1}\}' = \{x^t\cdot x\}' = \{x^t\}'\cdot x + x^t\cdot\{x\}' = tx^{t-1}\cdot x + x^t\cdot 1 = tx^t + x^t = (t+1)x^t$$
  となり，右辺は，$(t+1)x^{t+1-1} = (t+1)x^t$ であるから，$k=t+1$ の場合も成り立つ．

- k が整数のとき，
  $k=0$ の場合は，定数の微分の公式を用いて，
  $$(\text{左辺}) = \{x^0\}' = \{1\}' = 0, \qquad (\text{右辺}) = 0\cdot x^{-1} = 0$$
  から，成立が確認できる．$k<0$ の場合，$k=-n$ とおく．$n>0$ は自然数なので，上で示した $\{x^n\}' = nx^{n-1}$ と，商の微分の公式を用いることで，次が従う．
  $$\{x^k\}' = \{x^{-n}\}' = \left\{\frac{1}{x^n}\right\}' = \frac{-\{x^n\}'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} = kx^{k-1}.$$

- k が有理数のとき，
  整数 m と自然数 n を用いて，$k=\dfrac{m}{n}$ とかける．$y = x^{\frac{m}{n}}$ とおくと，$y^n = x^m$ である．y を x の関数とみて，合成関数の微分法に注意し，両辺を x で微分する[1] ことで，
  $$\frac{d}{dx}y^n = \frac{d}{dx}x^m \iff ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}}$$
  を得る．これから，$y^{n-1} = y^n\cdot y^{-1} = x^m\cdot x^{-\frac{m}{n}} = x^{m-\frac{m}{n}}$ に注意すると，次が従う．
  $$\{x^k\}' = \left\{x^{\frac{m}{n}}\right\}' = \frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = kx^{k-1}.$$

- k が実数のとき，
  $y=x^k$ とおく．両辺の自然対数[2]をとると，$\log y = \log x^k = k\log x$ となり，さらに両辺を x で微分する[3]ことで，
  $$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = k\cdot\frac{1}{x} \iff \frac{dy}{dx} = k\cdot\frac{y}{x}$$
  を得る．これから，次が従う．
  $$\{x^k\}' = \frac{dy}{dx} = k\cdot\frac{y}{x} = k\cdot\frac{x^k}{x} = kx^{k-1}.$$

□

注意． 関数 x^k の定義域を I とする．I は実定数 k の値によって，値域が実数全体 $\mathbb{R}$ に収まるように適切に定められているとする．例えば，$k\in\mathbb{Z}$ であれば，$I=\mathbb{R}$ で問題ないが，自然数 m に対して，$k=\frac{1}{m}$ のとき，m が奇数であれば，$I=\mathbb{R}$ であるが，m が偶数なら，$I=\mathbb{R}_{>0}$（正の実数全体）である．また，$k\in\mathbb{R}$ で考えるときは，$I=\mathbb{R}_{>0}$ でなければならない．

[1]正確には，$y^n - x^m = 0$ により，y を x の陰関数とみて，陰関数の微分を用いている．

[2]$x>0$ としている．最後の注意を参照．

[3]合成関数の微分法，対数関数 $\log x$ の導関数 $\{\log x\}' = \frac{1}{x}$，陰関数の微分を用いている．