## 対数関数の導関数・対数微分法

$a$ を，$a > 0, a \neq 1$ である実数とする．$a$ を底とする対数関数 $y = \log_a x$ の導関数を求めよう．証明の前に，自然対数の底[1]の定義

$$e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

を思い出す．これに基いて，次の公式が導かれる．

**対数関数の導関数その 1**

- $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a} \qquad (a > 0, a \neq 1)$

証明．導関数の定義から，

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{h} \cdot \log_a \left( \frac{x+h}{x} \right) \right\} = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{h} \cdot \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \right\}$$

と計算できる．ここで，$k = \frac{h}{x}$ とおくと，$h \to 0 \iff k \to 0$ である[2]．$h = xk$ を代入すると，

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{xk} \cdot \log_a(1+k) \right\} = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \cdot \log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{x} \log_a e$$

が成り立つ．最後の等号は，自然対数の底 $e$ の定義を用いた．

$\log e = 1$ なので，$a = e$ とすれば，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ が従い．そうでない場合は，底の変換公式

$$\log_a e = \frac{\log e}{\log a} = \frac{1}{\log a}$$

から，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$ も従う． □

$\log x$ の定義域は，$x > 0$ であるが，$\log |x|$ は，$0$ を除く全ての実数で定義される．このような関数の導関数も知っておくと便利である．

**対数関数の導関数その 2**

- $(\log |x|)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \log a} \qquad (a > 0, a \neq 1)$

証明．$x > 0$ のときは，$(\log |x|)' = (\log x)'$，$(\log_a |x|)' = (\log_a x)'$ なので，後は上の場合と同様である．

$x < 0$ のときは，合成関数の微分法を用いることで，

$$(\log_a |x|)' = \{\log_a(-x\}' = \frac{1}{(-x) \log a} \cdot (-x)' = \frac{1}{x \log a}$$

と計算できる．$a = e$ のときは，$\log e = 1$ より，$(\log |x|)' = \dfrac{1}{x}$ も従う．

□

[1] ネイピア数とも呼ばれる．

[2] $h$ が $0$ と異なる値を取りながら $0$ に近づくとき，$k$ が $0$ と異なる値を取りながら $0$ に近づく．逆も同じ．

次に対数微分法を紹介する．対数微分法は，関数 $f(x)$ の導関数が求め辛く，それよりも $\log \mid f(x) \mid$ の導関数の方が求めやすいときなどに有効である．しかし，下の注意でも述べるように，一般的に，$f(x)$ と $\log \mid f(x) \mid$ では，その定義域や微分可能である範囲が異なるため，注意が必要である．

**対数微分法**

微分可能な関数 $f(x)$ において，次が成り立つ．

$$f'(x) = f(x) \cdot \{\log \mid f(x) \mid\}'.$$

証明．上で証明した，対数関数の導関数その 2 と合成関数の微分法を用いる．$\log \mid f(x) \mid$ は，$g(x) = \log |x|$ と $f(x)$ の合成関数 $g(f(x))$ であるので，

$$\{\log \mid f(x) \mid\}' = \{g(f(x))\}' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

が成り立つ．これより結果を得る． □

**注意．** 微分可能な関数 $f(x)$ の定義域を $D$ とする．全ての $x \in D$ に対して，$f(x) > 0$ である場合は，$\mid f(x) \mid = f(x) > 0$ なので，全ての $x \in D$ に対して，$\log \mid f(x) \mid$ は，微分可能である．よって，このようなときは何も考える事はない．

そうでない場合を考える．$D$ の部分集合 $E$ を次のように定める．

$$E := \{x \in D \mid f(x) \neq 0\} \subset D.$$

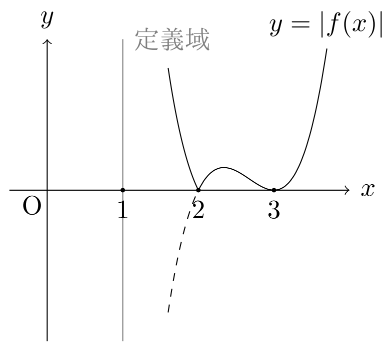
全ての $x \in E$ に対して，$\mid f(x) \mid$ は微分可能であり，$\mid f(x) \mid > 0$ なので，$\log \mid f(x) \mid$ は，$E$ で定義され微分可能である．一般的には，$E \subsetneq D$ なので，対数微分法で求めた導関数についても $E$ 以外の点に対しては，追加の議論が必要になる．具体的には，次の例題を参照．

**例．** 次の導関数を求めなさい．

$$f(x) = \frac{x(x-2)(x-3)^2}{\sqrt{x-1}}$$

解．まず分母に $\sqrt{x-1}$ があるので，$f(x)$ は，$x > 1$ で定義されていることに注意する．すなわち，$f(x)$ の定義域を $D$ とすると，$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ である．

$$E := \{x \in D \mid x \neq 2, 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1, x \neq 2, 3\}$$




とすると，全ての $x \in E$ に対して，$\mid f(x) \mid = \dfrac{x|x-2|(x-3)^2}{\sqrt{x-1}} > 0$ が成り立つ．両辺の自然対数をとると，

$$\log \mid f(x) \mid = \log x + \log |x-2| + 2\log |x-3| - \frac{1}{2}\log(x-1)$$

となり，両辺を $x$ で微分すると，$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{1}{2(x-1)}$ が成り立つ．以上より，次のように導関数が求められる：

$$f'(x) = f(x)\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{2(x-1)}\right\} = \frac{2(2x^2-6x+3)(x-3)}{\sqrt{x-1}} - \frac{x(x-2)(x-3)^2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

ここで注意しなけらばならないのは，ここまでの議論は $x \in E$ に対してのみ有効であるということである．最後に，$x = 2, 3$ に対して，$f'(x)$ は連続であることから，$\lim_{x \to 2} f'(x) = f'(2)$ が成り立つ．（$x = 3$ も同様.）よって，導関数の定義から，上の $f'(x)$ は，$x = 2, 3$ でも定義される． □