媒介変数表示された関数の導関数

合成関数の微分法と，逆関数の微分法を用いて，媒介変数（パラメータ）で表された関数の導関数を求める．

媒介変数表示された関数の導関数

命題. $x = g(t)$，$y = f(t)$ がそれぞれ t について微分可能であるとする．また，$x = g(t)$ には逆関数が存在して，定義域の全ての t に対して，$g'(t) \neq 0$ とする．このとき，y は x の関数であって，x について微分可能であり，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{すなわち，} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

が成り立つ．

証明. 仮定から，$x = g(t)$ の逆関数 $t = g^{-1}(x)$ は微分可能である．よって，合成関数

$$y = f(t) = f(g^{-1}(x))$$

は微分可能である．合成関数の微分法と逆関数の微分法から，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = f'(t) \cdot \frac{1}{g'(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

が従う． □

例. 単位円の接線の傾きを求めてみよう．$0 < \theta < \pi$ に対して，

$$\begin{cases} x = x(\theta) = \cos\theta \\ y = y(\theta) = \sin\theta \end{cases}$$

で表示された半円を考える．ここで，x, y をそれぞれ θ の関数と見ていることに注意する．この半円上の点 $\mathrm{P}(x, y) = \mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ における接戦の傾きは，θ を用いて，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

と表される．

以下は，合成関数・逆関数の微分法の復習である．

合成関数の微分法

命題. $y = f(x)$，$x = g(u)$ の定義域をそれぞれ，I，J とし，任意の $b \in J$ に対して，$g(b) \in I$ が成り立っているとする．$y = f(x)$，$x = g(u)$ がともに微分可能であるとき，合成関数 $y = f(g(u))$ も微分可能であり，その導関数について，

$$\{f(g(u))\}' = f'(g(u)) \cdot g'(u) \quad \text{すなわち，} \quad \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du}$$

が成り立つ．

逆関数の微分法

関数 $y = f(x)$ が，I 上で微分可能であり，逆関数が存在するとする．さらに，全ての $x \in I$ に対して，$f'(x) \neq 0$ であれば，逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は $f(I)$ で微分可能[a] であって，次が成り立つ．

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{すなわち，} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

[a] $f(I) := \{y = f(x) \mid x \in I\}$ は，関数 $f(x)$ における I の像である．