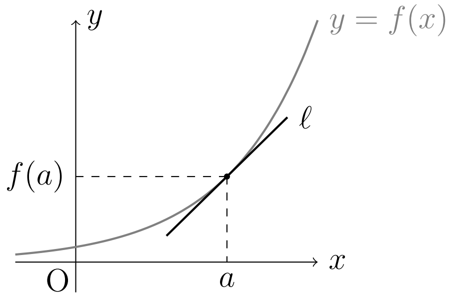
関数の増減と導関数の符号

平均値の定理（下を参照）を用いて，関数の増減と，その導関数との関係について考察する．

直感的には，右図のような曲線を描く関数 $f(x)$ と，その定義域内の点 a に対して，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ の傾きは，$x = a$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(a)$ であったので，



$$f'(a) > 0 \Longrightarrow \text{接線 } \ell \text{ の傾きが正} \Longrightarrow \text{関数は増加}$$

と考えられる．

このことを平均値の定理を用いて証明しよう．

命題. 閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ に対して，次が成り立つ．

- 全ての $x \in (a, b)$ に対して $f'(x) > 0$ ならば，$f(x)$ は $[a, b]$ 上で単調[a]に増加する．
- 全ての $x \in (a, b)$ に対して $f'(x) < 0$ ならば，$f(x)$ は $[a, b]$ 上で単調に減少する．
- 全ての $x \in (a, b)$ に対して $f'(x) = 0$ ならば，$f(x)$ は $[a, b]$ 上で定数である．

[a] 正確には狭義単調増加のこと．すなわち，$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$．狭義単調減少も同じ．

証明. 閉区間 $[a, b]$ 内の任意の点 u, v $(u < v)$ に対して，関数 $f(x)$ は，閉区間 $[u, v]$ で連続かつ，開区間 (u, v) で微分可能なので，この区間において平均値の定理が適用できる．平均値の定理から，$u < c < v$ であって，

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = f'(c) \iff f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) \tag{1}$$

を満たす実数 c が存在する．$u < v$ から，$v - u > 0$ なので，$f(v) - f(u)$ と $f'(c)$ は同符号であることに注意しておく．

- 全ての $x \in (a, b)$ に対して $f'(x) > 0$ ならば，$f'(c) > 0$ なので，次が従う．
$$f(v) - f(u) > 0 \iff f(u) < f(v).$$
- 全ての $x \in (a, b)$ に対して $f'(x) < 0$ ならば，$f'(c) < 0$ なので，次が従う．
$$f(v) - f(u) < 0 \iff f(u) > f(v).$$
- 全ての $x \in (a, b)$ に対して $f'(x) = 0$ ならば，$f'(c) = 0$ なので，次が従う．
$$f(v) - f(u) = 0 \iff f(u) = f(v).$$

u, v は閉区間 $[a, b]$ 内の任意の点であったので，以上から主張が従う． □

定理 (平均値の定理). 関数 $f(x)$ は，閉区間 $[a, b]$ で連続であり，開区間 (a, b) で微分可能であるとする．このとき，

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する．