



関数の凹凸と2次導関数の符号

関数のグラフの形と2次導関数の符号との関係を考察する．まずは次の2つの命題を思い出す.¹

命題 1. 微分可能な関数 $g(x)$ とその定義域内の区間 J において、次が成り立つ．

- 全ての $x \in J$ に対して $g'(x) > 0$ ならば、 $g(x)$ は J 上で（狭義）単調に増加する．

命題 2. 微分可能な関数 $y = f(x)$ と、その定義域内の区間 I において、次の2つは同値である．

- $y = f(x)$ が、 I で下に凸である．
- 導関数 $f'(x)$ は、 I 上で単調増加である．

この2つの命題を合わせることで、次が成り立つ．

命題. 微分可能な関数 $y = f(x)$ と、その定義域内の区間 I において、次が成り立つ．

- 全ての $x \in I$ に対して $f''(x) > 0$ ならば、 $f(x)$ は I で下に凸である．
- 全ての $x \in I$ に対して $f''(x) < 0$ ならば、 $f(x)$ は I で上に凸である．

証明. 下に凸の場合のみ証明する．命題 1 を $f'(x)$ に適用する（すなわち $g(x) = f'(x)$ と考える）ことで、

全ての $x \in I$ に対して、 $f''(x) > 0$ ならば、 $f'(x)$ は I 上で単調増加．

が成り立つ．さらに命題 2 の同値性と合わせて主張が従う． $\square$

1次導関数の符号と2次導関数の符号を調べることで、関数の極値を求めることができる．まずは、次の命題を思い出す.²

命題 3. 微分可能な関数 $f(x)$ において、次が成り立つ．

$$f(a) \text{ が極値} \implies f'(a) = 0$$

この命題の逆は必ずしも成り立たない．すなわち、 $f'(a) = 0$ であっても、 $f(a)$ が極（値）であるとは限らないのであった．しかし、 $f''(a)$ が存在すると、次のように極値を判定することができる．

命題. 微分可能な関数 $f(x)$ において、 $x = a$ の十分近くの区間で $f''(x)$ が連続であるとする．このとき、次が成り立つ．

- $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ ならば、 $f(a)$ は極小値である．
- $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ ならば、 $f(a)$ は極大値である．

証明. 1つめの主張のみ証明する． $x = a$ の十分近くの区間で $f''(x)$ は連続であり、 $f''(a) > 0$ であるから、 $x = a$ の十分近くの区間であって、 $f''(x) > 0$ が成り立つような区間が存在する．そこで、この区間を I とする． $x_1, a, x_2 \in I$ ($x_1 < a < x_2$) とすると、 I 上で $f'(x)$ は単調増加であるから、 $f'(a) = 0$ と合わせて、

$$f'(x_1) < f'(a) < f'(x_2) \iff f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$$

が成り立つ．よって、区間 $I_+ := \{x \in I \mid x > a\}$ において、 $f(x)$ は単調減少であり、区間 $I_- := \{x \in I \mid x < a\}$ において、 $f(x)$ は単調増加である．以上より、任意の $x \in I$ ($x \neq a$) に対して、 $f(x) > f(a)$ が成り立つので、 $f(a)$ は極小値である． $\square$

¹命題 1 <https://gleamath.com/derivative-test01> , 命題 2 <https://gleamath.com/function-shape>

²命題 3 <https://gleamath.com/extremum-of-function>

連続関数 $y = f(x)$ の定義域内の点 $x = a$ に対して、 $x = a$ の十分近くの区間を I とし、 I の部分集合 I_+ , I_- をそれぞれ、

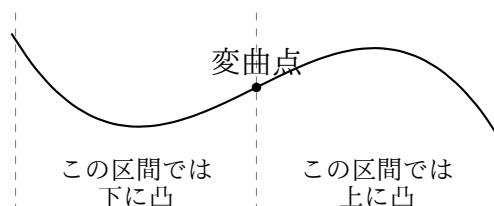
$$I_+ = \{x \in I \mid x > a\}, \quad I_- = \{x \in I \mid x < a\}$$

と定める。

定義. $y = f(x)$ 上の点 $P(a, f(a))$ が変曲点であるとは、次のどちらかが成り立つときをいう。

- $y = f(x)$ は、区間 I_+ で下に凸、かつ、区間 I_- で上に凸である。
- $y = f(x)$ は、区間 I_+ で上に凸、かつ、区間 I_- で下に凸である。

変曲点とは大雑把に言って、関数の凹凸が変化する境目の点である。(右図を参照。)



変曲点に対して、次が成り立つ。

命題. 微分可能な関数 $y = f(x)$ 上の点 $P(a, f(a))$ に対して、 $x = a$ の前後で、 $f''(x)$ の符号が変わるならば、点 P は変曲点である。

証明. 任意の $x_1 \in I_-$ に対して、 $f''(x_1) > 0$ であり、任意の $x_2 \in I_+$ に対して、 $f''(x_2) < 0$ であるとすると、区間 I_- で、 $f(x)$ は、下に凸であり、区間 I_+ で、 $f(x)$ は、上に凸であるので、定義から、点 $P(a, f(a))$ は変曲点である。 $f''(x_1) < 0$ かつ $f''(x_2) > 0$ のときも同様である。□

命題. 微分可能な関数 $y = f(x)$ 上の点 $P(a, f(a))$ に対して、次が成り立つ。

$$\text{点 } P \text{ が変曲点} \implies f''(a) = 0$$

証明. 点 P が変曲点であるとし、 $y = f(x)$ は、区間 I_- で下に凸、区間 I_+ で上に凸であるとする。 I_- 上で、 $f'(x)$ は単調増加なので、任意の $x_1 \in I_-$ に対して、 $f'(x_1) < f'(a)$ が成り立つ。よって、このとき、

$$\frac{f'(a) - f'(x_1)}{a - x_1} > 0$$

が成り立つ。同様に、 I_+ 上で、 $f'(x)$ は単調減少であることから、任意の $x_2 \in I_+$ に対して、

$$\frac{f'(x_2) - f'(a)}{x_2 - a} < 0$$

が成り立つ。さらに、 $f'(x)$ は $x = a$ で微分可能なので、 $x = a$ における右側微分係数と左側微分係数が存在し、それらはそれぞれ次のように評価できる。

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(a) - f'(x)}{a - x} \geq 0 \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} \leq 0$$

さらにこれらの微分係数は一致するので、 $f''(a) \leq 0$ かつ $f''(a) \geq 0$ であり、 $f''(a) = 0$ が従う。 $y = f(x)$ が、区間 I_- で上に凸、区間 I_+ で下に凸である場合も同様である。□

注意. 上の命題の逆は成り立たない。すなわち、 $f''(a) = 0$ であっても、 P が変曲点であるとは限らないことに注意する。