三角関数の導関数

三角関数の導関数に関する基本的な公式を証明する.（角は弧度法であることに注意する.）

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

証明. 導関数の定義 $f'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ に基いて証明する. 加法定理を用いて,

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h - \sin x(1-\cos h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1-\cos h}{h}\right) \qquad (1)\end{aligned}$$

と計算できる. ここで, 三角関数の極限の準公式 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$ をから,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h^2}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

が成り立つことと, 基本公式 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ を用いて, (**??**) 式の最右辺は,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(\cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1-\cos h}{h}\right) &= \cos x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} - \sin x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} \\ &= \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 \\ &= \cos x\end{aligned}$$

と計算できる. これから, $(\sin x)' = \cos x$ が従う.

次に, この結果を用いて, $(\cos x)' = -\sin x$ を示す.
$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ であることと, 合成関数の導関数の公式 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ を用いて,

$$(\cos x)' = \left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

と計算できる. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ であることから結果が従う.

最後に, これまでの結果を用いて, $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を示す.
商の微分の公式 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ を用いて,

$$(\tan x)' = \left\{\frac{\sin x}{\cos x}\right\}' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

と計算でき, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ なので, 結果が従う. □