微分係数と導関数

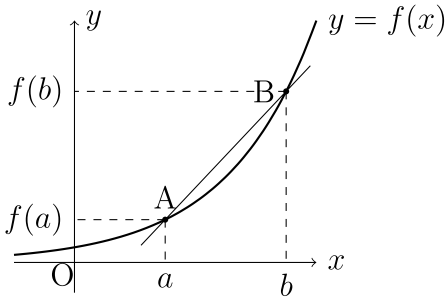
定義. 関数 $y=f(x)$ において，x **が** a **から** b **まで変化するときの関数** $f(x)$ **の平均変化率**とは，x の変化量 $b-a$ に対する，y の変化量 $f(b)-f(a)$ の割合，
すなわち

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

のことである．
これは，$y=f(x)$ のグラフ上の 2 点

$$\mathrm{A}(a, f(a)), \quad \mathrm{B}(b, f(b))$$

を通る直線 AB の傾きである．



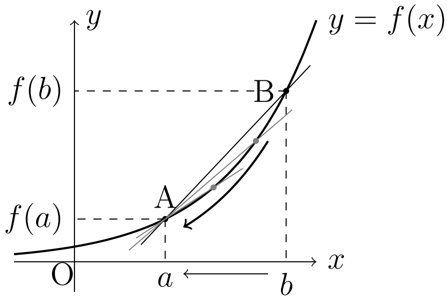
平均変化率は，ある区間 $a \leqq x \leqq b$ における関数 $f(x)$ の変化の割合であるが，点 B を点 A に近づけ，この区間を限りなく小さくすることを考える．このときの平均変化率の極限値が存在すれば，それを微分係数という．正確には，次の定義の通りである．

定義. 関数 $f(x)$ において，極限値

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

が存在するとき，この値を，**関数** $f(x)$ **の** $x=a$ **における微分係数**といい，$f'(a)$ で表す．
これは，$b-a=h$ とおくことで，次のようにも表せる．

$$f'(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



定義. 関数 $f(x)$ において，極限値 $\displaystyle\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，これを $f(x)$ の $x=a$ における**右側微分係数**といい，極限値 $\displaystyle\lim_{h \to -0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，これを $f(x)$ の $x=a$ における**左側微分係数**という．

定義. 関数 $f(x)$ において，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ **で微分可能**であるという．また，ある区間 I に対して，全ての $x \in I$ で $f(x)$ が微分可能であるとき，$f(x)$ は**区間** I **で微分可能**という．ただし，I が端点を持つ場合，その端点での微分係数の存在については，（定義域内からの）片側微分係数だけを考えることにする[1]．定義域の全ての点で微分可能のときは，単に，$f(x)$ は**微分可能**という．定義域が端点を持つ場合も上と同様である．

次の定理は重要である．

定理. 関数 $f(x)$ が，$x=a$ で微分可能なら，$x=a$ で連続である．

証明. $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$ を示せば良いが，これは次から従う．

$$\lim_{x \to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x \to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a)\right\}=f'(a) \cdot 0=0$$

□

[1] 例えば，$f(x)$ が区間 $I=[a, b]$ で微分可能であるとは，区間 (a, b) の全ての点で微分可能であり，$x=a$ における右側微分係数，$x=b$ における左側微分係数が共に存在するときをいう．

次に導関数を定義する．関数 $y=f(x)$ が区間 I で微分可能であるとする．このとき，$a \in I$ に対して，$f'(a)$ を対応させることで，新しい関数を定義することができる．すなわち関数

$$I \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad a \mapsto f'(a)$$

を定義することができる．

> **定義．** 関数 $y=f(x)$ に対して，上のように定義される関数を $y=f(x)$ の**導関数**といい，$f'(x)$，y'，$\dfrac{d}{dx}f(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$ などと表す．すなわち，
>
> $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> である．関数 $f(x)$ から，その導関数を求めることを $f(x)$ **を** x **で微分する**という．

補足 (記号について)**.** 導関数を表す記号は様々である．これらは歴史的にその記号を使っていた数学者の名前に因んで，それぞれ

- $\dfrac{dy}{dx}$ は，ライプニッツ記法，
- y' は，ラグランジュ記法，
- $\dot{y}$ は，ニュートン記法

と呼ばれている．

また，導関数の定義においては，次のようなデルタ（Δ）記号[2]が用いられることがある：$\Delta x=(x+h)-x=h$（x の増分），$\Delta y=f(x+h)-f(x)$（y の増分）とすることで，導関数の定義は，次のように表せる．

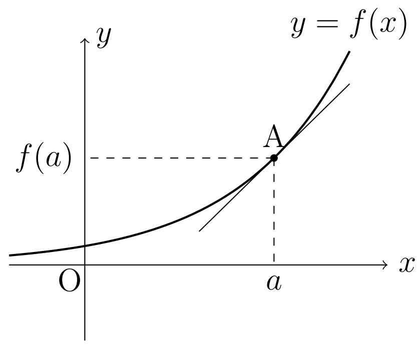
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ここで，右辺の $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は，$\Delta y \div \Delta x$ を意味しているが，左辺の $\dfrac{dy}{dx}$ は，割り算ではなく，単なる記号であることに注意する．

....

接線や接点は，次のように定義される．

定義． 微分係数の定義において，直線 AB は，b を限りなく a に近づけることにより，点 A を通り傾きが $f'(a)$ である直線に限りなく近づく．この直線を曲線 $y=f(x)$ 上の点 A における**接線**といい，点 A をこの接線の**接点**という．



定義から従う次の事実は重要なので，改めてまとめておく．

> $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における接線の傾きは，$f'(a)$ であり，接線の方程式は，次のように表せる．
>
> $$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

[2] この記号もライプニッツによる．