楕円と双曲線の準円

二次曲線の直交する 2 接線の交点の軌跡についてまとめる．放物線に対して，この軌跡は準線であることが知られている[1]．すなわち次が成り立つ．

命題． $p, q \neq 0$ とする．

- 放物線 $y^2 = 4px$ の直交する 2 接線の交点の軌跡は，準線 $x = -p$ である．
- 放物線 $x^2 = 4qx$ の直交する 2 接線の交点の軌跡は，準線 $y = -q$ である．

楕円と双曲線に対しては，次が成り立つ．

命題．

- 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の直交する 2 接線の交点の軌跡は，円

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

である．

- 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ の直交する 2 接線の交点の軌跡は，

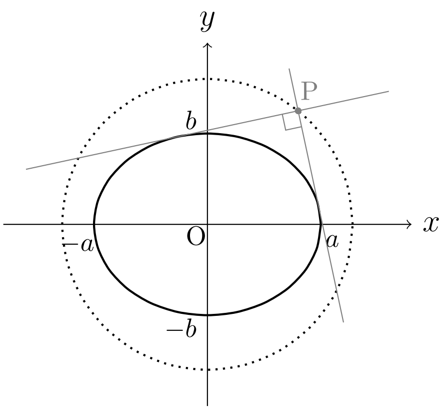
$$x^2 + y^2 = \pm(a^2 - b^2) \tag{1}$$

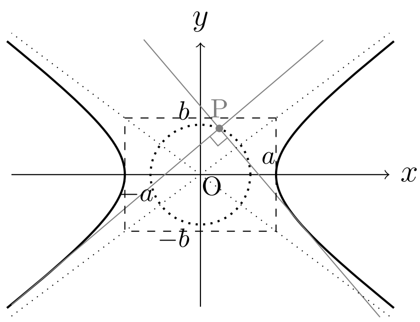
である．ただし，漸近線 $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ 上の 4 点は除く．

注意． 軌跡の方程式 (1) の表記は，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の場合の軌跡が，$x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ であり，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ の場合の軌跡が，$x^2 + y^2 = -(a^2 - b^2)$ であるということ．また，どちらの場合においても，$\pm(a^2 - b^2) < 0$ となるような a, b に対しては，双曲線の直交する 2 接線を引くことができない．よって，その交点の軌跡も存在しない．

証明．それぞれ，楕円の外から引いた接線の直交条件[2]，双曲線の外部の点から引いた接線の直交条件[3] から従う． □

定義． 上の命題の軌跡を，楕円（または双曲線）の**準円**という．





[1] https://gleamath.com/tangent-lines-of-parabola01/
[2] https://gleamath.com/tangent-lines-of-ellipse01/
[3] https://gleamath.com/tangent-lines-of-hyperbola01/