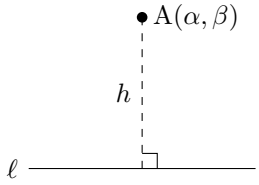
点と直線の距離

定理. 点 $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$ と，直線 $\ell : ax + by + c = 0$ の距離 h は，次の通りである．

$$h = \frac{|\, a\alpha + b\beta + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

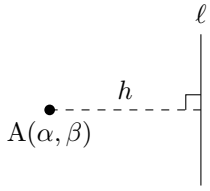
証明. (i) $a = 0, b \neq 0$ の時，



$\ell : by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{c}{b}$ であり，これは x 軸に平行な直線である．

よって，$h = \left|\beta + \dfrac{c}{b}\right| = \dfrac{|b\beta + c|}{|b|}$ が成り立つ．

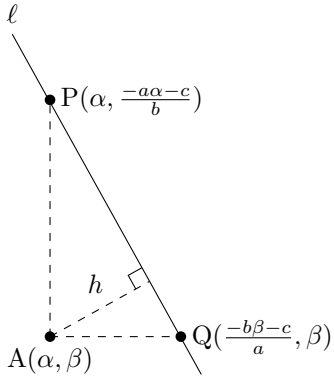
(ii) $a \neq 0, b = 0$ の時，



$\ell : ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{c}{a}$ であり，これは y 軸に平行な直線である．

よって，$h = \left|\alpha + \dfrac{c}{a}\right| = \dfrac{|a\alpha + c|}{|a|}$ が成り立つ．

(iii) $a \neq 0, b \neq 0$ の時，



点 A を通り y 軸に平行な直線と，直線 ℓ との交点を P とすると，

点 P の x 座標は，α であり，y 座標は，$\dfrac{-a\alpha - c}{b}$ である．

$\left(\because a\alpha + by + c = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-a\alpha - c}{b}\right)$

また，点 A を通り x 軸に平行な直線と，直線 ℓ との交点を Q とすると，点 Q の y 座標は，β であり，x 座標は，$\dfrac{-b\beta - c}{a}$ である．

$\left(\because ax + b\beta + c = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-b\beta - c}{a}\right)$

△ABC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{PA} \cdot \mathrm{QA} = \frac{1}{2} \cdot \left|\beta + \frac{a\alpha + c}{b}\right| \cdot \left|\alpha + \frac{b\beta + c}{a}\right| = \frac{|a\alpha + b\beta + c|^2}{2|ab|} \tag{1}$$

が成り立つ．一方，

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{\left(\frac{-b\beta - c}{a} - \alpha\right)^2 + \left(\beta + \frac{a\alpha + c}{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot |a\alpha + b\beta + c|}{|ab|}$$

を用いると，

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \mathrm{PQ} = h \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot |a\alpha + b\beta + c|}{2|ab|} \tag{2}$$

が成り立つ．(1)，(2) より，

$$\frac{|a\alpha + b\beta + c|^2}{2|ab|} = h \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot |a\alpha + b\beta + c|}{2|ab|}$$

が成り立つ．これを h に関して解けば，主張の公式を得る． □

証明（ベクトルを用いる方法）．直線 $\ell : ax+by+c=0$ の法線ベクトル（ℓ に垂直なベクトル）の成分表示は，(a,b) である．（下の補題を参照．）よって，ベクトル (a,b) と同じ方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{e}$ とすると，

$$\overrightarrow{e}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b)$$

である．直線 ℓ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ をとる．下図のように，線分 AP を斜辺とする直角三角形 AQP ができるように点 Q をとると，$h=\mathrm{PQ}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{e}$ は同じ方向であることと，$\overrightarrow{\mathrm{QA}}$ と $\overrightarrow{e}$ は垂直であることに注意すると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{e}|=|(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QA}})\cdot\overrightarrow{e}|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{e}+\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{e}|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$$

が成り立つので，$h=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{e}|$ である．一方，成分表示を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{e}=(\alpha-x_0,\beta-y_0)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\alpha-ax_0+b\beta-by_0)$$

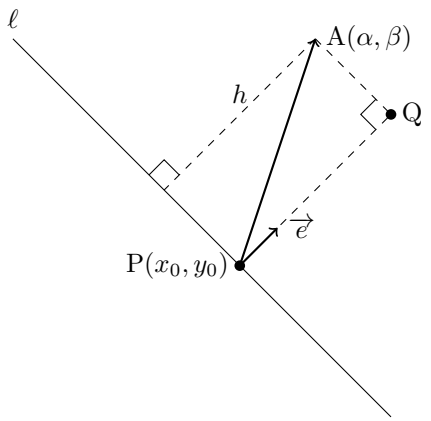
とかけるが，点 P は ℓ 上の点であったから，$ax_0+by_0+c=0\Leftrightarrow -ax_0-by_0=c$ が成り立つことに注意すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{e}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\alpha+b\beta+c)$$

が成り立つ．以上より，

$$h=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{e}|=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

が成り立つ．



□

補題. ベクトル $\overrightarrow{a}=(a,b)$ は，直線 $\ell : ax+by+c=0$ の法線ベクトルである．

証明. $\ell : ax+by+c=0\Leftrightarrow ax+by=-c$ から，直線 ℓ 上の任意の点の位置ベクトル (x,y) とベクトル $\overrightarrow{a}=(a,b)$ の内積は，常に $-c$ であることがわかる．直線 ℓ 上の 2 点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$，$\mathrm{P}_1(x_1,y_1)$ をとり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ を考える．$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ の内積は，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0)\cdot(a,b)=ax_1-ax_0+by_1-by_0=-c-(-c)=0$$

と計算できる．したがって，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ は垂直である． □