除法の原理

除法の原理と呼ばれる定理を証明する．簡潔に定理を記述するために，次のように記号を定める．

定義. 整式 $A(x)$ の次数を $\deg A$ と表す．ただし，$A(x)=0$ のときは，$\deg A=-\infty$ と定める．

注意. 整式の次数について，0 の次数は定められていなかったことに注意する．上で 0 の次数を $-\infty$ であると定義したことについて，本稿の内容だけであれば[1]，

0 以外の全ての整式の次数より，0 の次数は小さい．

という解釈で十分である．

除法の原理

$A(x), B(x)$ を 0 でない整式とする．このとき，次を満たす整式 $Q(x), R(x)$ が一意的に存在する．

$$A(x)=B(x)Q(x)+R(x), \qquad \deg R<\deg B.$$

証明．$\deg A \geq \deg B$ の場合を考える．$\deg A=m, \deg B=n$ とおき，

$$A(x)=a_m x^m+\cdots, \qquad B(x)=b_n x^n+\cdots$$

とする．このとき，

$$A_1(x)=A(x)-\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}B(x)$$

の次数は，$m-1$ 以下である．ここで，$\deg A_1<\deg B$ なら，$Q(x)=\dfrac{a_m}{b_n}x^{m-n}, R(x)=A_1(x)$ が求める整式である．$\deg A_1 \geq \deg B$ なら，$A_1(x)$ と $B(x)$ に対して，上と同じ操作を繰り返せば，次数が，$\deg A_1-1$ 以下の整式 $A_2(x)$ を得ることができる．あとは帰納的にして，必ず $\deg A_k<\deg B$ となる．整式 $A_k(x)$ を求めることができる．よってこのとき，$R(x)=A_k(x)$ と

$$A_k(x)=A(x)-Q(x)B(x)$$

を満たす $Q(x)$ が求める整式である．

はじめから，$\deg A<\deg B$ の場合は，$R(x)=A(x)$，$Q(x)=0$ とすると，これが求める整式である．

最後に一意性を示す．条件を満たす整式が 2 組あると仮定し，これらを $Q_1(x), R_1(x)$ と $Q_2(x), R_2(x)$ とする．

$$A(x)=B(x)Q_1(x)+R_1(x), \qquad A(x)=B(x)Q_2(x)+R_2(x)$$

が成り立つので，これから，等式

$$B(x)\{Q_1(x)-Q_2(x)\}=R_2(x)-R_1(x)$$

を得る．条件 $\deg R_1<\deg B$ と $\deg R_2<\deg B$ から，右辺の次数は，$\deg B$ より小さいので，$Q_1(x)-Q_2(x)=0$ が従う（そうでないと左辺の次数が $\deg B$ 以上になってしまう）．よって，$R_2(x)-R_1(x)=0$ も従い，$Q_1(x)=Q_2(x)$，$R_2(x)=R_1(x)$ が従う． $\square$

---

[1] 整式と整式の積について，指数法則に注意すると，（n 次式）$\times$（m 次式）$=$（$n+m$ 次式）と考えられるが，この等式は，一方の整式が 0 である場合には成り立たない（というより，0 の次数を定めていなかったのでこのような等式を考えることができない）．しかし，0 の次数を $-\infty$ と定め，任意の自然数 n に対して，$(-\infty)+n=-\infty$，$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ のように演算規則を定めることにより，0 の場合にも上の等式が成り立つようにできる．本稿の内容とは直接関係がないが，0 の次数を $-\infty$ と定めるのは，このような理由のためである．