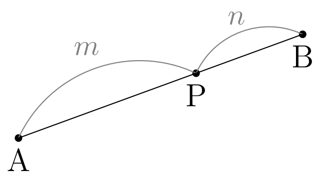
内分点と外分点

線分 AB の中点 M とは，線分 AB を半分に分ける点，すなわち $\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$ が成り立つような，線分 AB 上の点のことであった．

　$\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$ が成り立つとは，辺の比を使って言い換えると，$\mathrm{AM} : \mathrm{BM} = 1 : 1$ が成り立つということであるが，ここでは，もっと一般の比に対して，線分 AB を分ける点を定義する．

　以下，m, n は正の数とする．

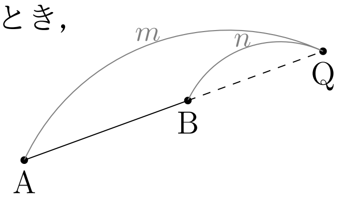
定義． 線分 AB を $m : n$ に**内分する点** P とは，$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ が成り立つような，線分 AB 上の点のことをいう．点 P のことを**内分点**ともいう．



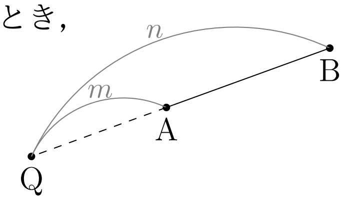
　さらに，線分 AB の延長線上にある点に対しても次のように定義する．

定義． $m \neq n$ とする．線分 AB を $m : n$ に**外分する点** Q とは，$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$ が成り立つような，線分 AB の延長線上にある点のことをいう．点 Q のことを**外分点**ともいう．

$m > n$ のとき，



$m < n$ のとき，



注意． 内分点は，線分 AB 上の点であったのに対して，外分点は，線分 AB の延長線上にある点（線分 AB 上の点ではない）であることに注意する．また，外分点は，m と n の大小により，線分 AB の延長線上の A 側にあるか，B 側にあるかが変わるので注意する．

　練習のため，次のような問題を考えよう．

問題． 正三角形 ABC に対して，辺 AB，辺 BC，辺 CA を $m : n$ に内分する点をそれぞれ，P，Q，R とする．このとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ は，正三角形であることを示せ．

解．仮定から，

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = \mathrm{CR} : \mathrm{RA} = m : n$$

であるが，$\triangle\mathrm{ABC}$ は，正三角形なので，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ である．よって，

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BQ} = \mathrm{CR}, \qquad \mathrm{PB} = \mathrm{QC} = \mathrm{RA}$$

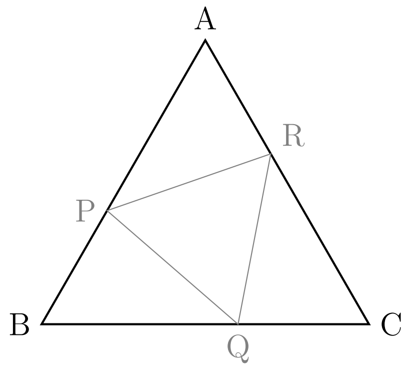
が成り立つ．再び $\triangle\mathrm{ABC}$ は，正三角形という仮定から，

$$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$$

が成り立つ．以上から，二辺とその間の角が等しいので，3 つの $\triangle\mathrm{APR}$，$\triangle\mathrm{BQP}$，$\triangle\mathrm{CRQ}$ は合同である．よって，

$$\mathrm{PR} = \mathrm{QP} = \mathrm{RQ}$$

が成り立つので，$\triangle\mathrm{PQR}$ は正三角形である．



□