倍角の公式と半角の公式

２倍角，３倍角，半角の公式と呼ばれる公式を証明する．これらは，次の加法定理の特別な場合と言える．

（復習）加法定理

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

加法定理において，$\beta=\alpha$ とすることで，次の２倍角の公式が得られる．

２倍角の公式

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
  $= 1 - 2\sin^2\alpha$
  $= 2\cos^2\alpha - 1$

証明．加法定理 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ において，$\beta=\alpha$ としたものを用いると，

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha)\\ &= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

と計算できる．

また，$\cos 2\alpha$ についても同様にして，

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha\\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad (1)\end{aligned}$$

と計算できる．ここで，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \iff \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ を (1) 式に代入すると，

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

が得られ，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \iff \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ を (1) 式に代入すると，

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

が得られる．

最後に $\tan 2\alpha$ についても同様に加法定理を用いて，

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan(\alpha+\alpha)\\ &= \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}\\ &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

が従う． □

3倍角の公式

- $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
- $\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$
- $\tan 3\alpha = \dfrac{\tan^3\alpha - 3\tan\alpha}{3\tan^2\alpha - 1}$

証明．加法定理と２倍角の公式を用いて次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) \\
&= \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha && \text{（加法定理を用いた）} \\
&= (2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha && \text{（２倍角の公式を用いた）} \\
&= -\sin^3\alpha + 3\sin\alpha\cos^2\alpha && (2) \\
&= -\sin^3\alpha + 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) && \text{（$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$を代入した）} \\
&= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) \\
&= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha && \text{（加法定理を用いた）} \\
&= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha && \text{（２倍角の公式を用いた）} \\
&= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha && (3) \\
&= \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha && \text{（$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$を代入した）} \\
&= -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha
\end{aligned}$$

最後に $\tan 3\alpha$ を計算する．上と同様に加法定理と２倍角の公式を用いて計算することもできるが，ここでは，上の (2)，(3) 式を用いて計算する．

$$\begin{aligned}
\tan 3\alpha &= \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} \\
&= \frac{-\sin^3\alpha + 3\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha} && \text{（(2)，(3) 式を代入した）} \\
&= \frac{-\tan^3\alpha + 3\tan\alpha}{1-3\tan^2\alpha} && \text{（分母分子に$\frac{1}{\cos^3\alpha}$を掛けた）}
\end{aligned}$$

□

半角の公式

- $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$
- $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$
- $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

証明．２倍角の公式を用いて，$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta \iff \sin^2\beta = \dfrac{1-\cos 2\beta}{2}$ を得る．これに，$\beta = \dfrac{\alpha}{2}$ を代入することで，$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ が従う．

同様に，２倍角の公式から，$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 \iff \cos^2\beta = \dfrac{1+\cos 2\beta}{2}$ を得る．これに，$\beta = \dfrac{\alpha}{2}$ を代入することで，$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ が従う．

最後に，これらを用いて，

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

が従う．

□