4 次関数の複接線の存在条件

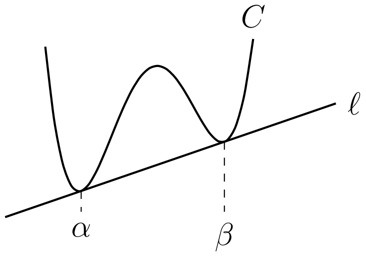
定義. 曲線と異なる 2 点で接する接線を複接線または二重接線という.

4 次関数の複接線の存在条件について，次が成り立つ.

命題. $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ (a \neq 0)$ とする.
曲線 $C : y = f(x)$ の複接線 ℓ が存在するための必要十分条件は，2 次導関数 $f''(x)$ に対して，$f''(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つこと，すなわち，

$$3b^2 - 8ac > 0$$

が成り立つことである.



証明. 曲線 $C : y = f(x)$ が異なる 2 点

$$\mathrm{A}\,(\alpha, f(\alpha)), \quad \mathrm{B}\,(\beta, f(\beta))$$

で接する複接線 ℓ を持つと仮定する（ただし，$\alpha < \beta$ とする）. ℓ は，点 A における接線であることから，ℓ の方程式は，

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

と表せ，これが点 B を通ることから，

$$f(\beta) = f'(\alpha)(\beta - \alpha) + f(\alpha) \tag{1}$$

が成り立つ. さらに，ℓ は点 B における接線でもあるので，

$$f'(\alpha) = f'(\beta) \tag{2}$$

が成り立つ. 一方，平均値の定理[1] から，

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma), \qquad \alpha < \gamma < \beta$$

を満たす γ が存在するが，これと，(1),(2) を合わせて，

$$f'(\alpha) = f'(\gamma) = f'(\beta)$$

が従う. ここで，$f'(\alpha) = f'(\gamma)$ と，$f'(\gamma) = f'(\beta)$ にロルの定理[2] を適用することで，

$$f''(\delta_1) = 0, \qquad f''(\delta_2) = 0, \qquad \alpha < \delta_1 < \gamma < \delta_2 < \beta$$

を満たす δ_1, δ_2 が存在することがわかる. すなわち，

$$f''(x) = 0 \iff 12ax^2 + 6bx + 2c = 0 \tag{3}$$

が異なる 2 つの実数解 δ_1, δ_2 を持つことが従う. 判別式を考えることにより，これは，

$$3b^2 - 8ac > 0 \tag{4}$$

が成り立つと言っても同じことである. よって，これが必要条件であることが従う.

[1]https://gleamath.com/thm-of-mean-value/
[2]https://gleamath.com/thm-of-rolle/

次に十分性を示す．4 次関数 $f(x)$ が，(4) を満たすと仮定する．複接線の存在を示すだけなので，適当に平行移動させた曲線で考えても良い．そこで，計算を簡単にするために，曲線 $C: y=f(x)$ を，

$$x\text{ 軸方向に}\frac{b}{4a},\qquad y\text{ 軸方向に}\frac{-3b^4+16ab^2c-64a^2bd+256a^3e}{256a^3}$$

だけ平行移動させた直線を考える．

$$f\left(x-\frac{b}{4a}\right)-\frac{-3b^4+16ab^2c-64a^2bd+256a^3e}{256a^3}=ax^4+\frac{-3b^2+8ac}{8a}x^2+\frac{2b^3-8abc+16a^2d}{16a^2}x$$

と計算できるので，これの右辺を $g(x)$ とおく．すなわち

$$g(x)=ax^4+px^2+qx,\qquad p=\frac{-3b^2+8ac}{8a},\quad q=\frac{2b^3-8abc+16a^2d}{16a^2}$$

とおく．ここで，仮定 (4) と p の形から，今，

$$-ap>0 \tag{5}$$

であることに注意しておく．このとき，曲線 $y=g(x)$ の複接線は，次のように書ける：

$$y=\ell(x),\qquad \ell(x)=qx-\frac{p^2}{4a}. \tag{6}$$

これが実際に $y=g(x)$ の複接線であることを示せば証明が終わるが，そのためには，4 次方程式 $g(x)-\ell(x)=0$ が，異なる 2 つの二重解を持つことを示せば良い．仮定 (5) から，$-\frac{p}{2a}>0$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
g(x)-\ell(x)&=ax^4+px^2+\frac{p^2}{4a}\\
&=a\left(x^4+\frac{p}{a}x^2+\frac{p^2}{4a^2}\right)\\
&=a\left(x^2+\frac{p}{2a}\right)^2\\
&=a\left\{\left(x+\sqrt{-\frac{p}{2a}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{p}{2a}}\right)\right\}^2\\
&=a\left(x+\sqrt{-\frac{p}{2a}}\right)^2\left(x-\sqrt{-\frac{p}{2a}}\right)^2
\end{aligned}$$

と計算できるので，4 次方程式 $g(x)-\ell(x)=0$ は，異なる 2 つの二重解 $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2a}}$ を持つ．したがって，直線 $y=\ell(x)$ は，曲線 $y=g(x)$ に異なる 2 点

$$\left(\sqrt{-\frac{p}{2a}},\ g\left(\sqrt{-\frac{p}{2a}}\right)\right),\qquad \left(-\sqrt{-\frac{p}{2a}},\ g\left(-\sqrt{-\frac{p}{2a}}\right)\right)$$

で接する複接線である．よって，条件 (4) は，曲線 C が複接線を持つための十分条件である． □

注意. 上の命題の証明において，前半（必要条件側）の証明の (3) 式の手前までは，$f(x)$ が 4 次関数であるという事実を用いていないことに注意する．つまり，一般の曲線 $C: y=f(x)$ に対しても，「C が複接線を持つための必要条件は，$f''(x)=0$ が異なる 2 つの解を持つことである」ということが成り立つ．