4 次関数の複接線定理

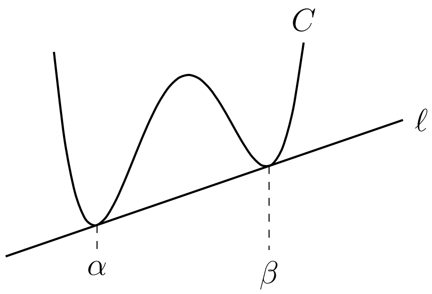
定義. 曲線と異なる 2 点で接する接線を複接線または二重接線という．

任意の曲線に対して複接線が存在するわけではないが，以下では，複接線を持つ 4 次関数

$$C : y = f(x), \qquad f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a \neq 0)$$

のみを考える[1]．曲線 C と複接線の傾きについて，次が成り立つ．

定理 (複接線定理)**.** 曲線 $C : y = f(x)$ が複接線 ℓ を持つとする．このとき，$f'''(\gamma) = 0$ が成り立つような γ に対して，$f'(\gamma)$ は，複接線 ℓ の傾きである．



また，異なる 2 つの接点の x 座標をそれぞれ α, β とすると，$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ が成り立つ．

証明. 曲線 C の複接線 ℓ の方程式を

$$y = \ell(x), \qquad \ell(x) = sx + t$$

として，異なる 2 つの接点を $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ とすると，仮定から，

$$\begin{aligned} f(x) - \ell(x) &= a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \\ f(x) &= a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + \ell(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．この $f(x)$ に対して，1 次導関数と，3 次導関数はそれぞれ次のように計算できる：

$$f'(x) = 2a(x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta) + s, \qquad f'''(x) = 12a(2x-\alpha-\beta).$$

よって，3 次導関数の形から，

$$f'''(x) = 0 \iff x = \frac{\alpha+\beta}{2} \ (=: \gamma)$$

が従い，1 次導関数の形から，

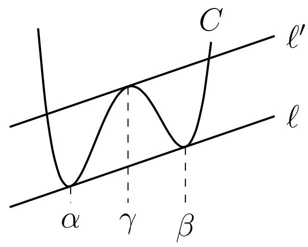
$$f'(\gamma) = f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = s$$

が従う． □

補足. 複接線定理から，曲線 C 上の点

$$(\gamma, f(\gamma)) = \left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}, f\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$$

における接線 ℓ' は，複接線 ℓ と平行であることがわかる．これらの直線の傾き $f'(\gamma)$ は，4 次関数の対称性と大きく関係している[2]．



[1] 4 次関数の複接線の存在条件に関しては，https://gleamath.com/double-tangent-of-quartic-function/ を参照．
[2] 4 次関数の対称性 https://gleamath.com/symmetry-of-quartic-function/ を参照．