重複組合せ

定義. 異なる n 個のものから，重複を許して，r 個を取り出す組合せを**重複組合せ**という．

注意.（重複順列の場合と同様に，）一般的には，n 個のものから $\cdots$ という表現が使われるが，n 種類のものから $\cdots$ と言い換えた方がイメージが湧きやすいかもしれない．重複を許すので，n 個しかないのではなくて，n 種類のものがそれぞれ沢山あるのである．

具体例を見てみよう：Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ と書かれた 3 種類の玉が，それぞれ沢山あるとする．このとき，7 個の玉を取り出す組合せの総数を考える．

唐突ではあるが，次のように，7 つの ◯ と，2 本の仕切り | を用意する．

◯◯◯◯◯◯◯ | |

これら 9 つの並べ方の総数を考えると，これは 9 カ所のうち ◯ を置く 7 カ所を選ぶ[1] 組合せの総数を考えれば良いので，${}_9\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通りである．

今求めたものと考えている問題を対応させよう．◯ と | の 1 つの並べ方について，

◯◯ | ◯◯◯◯ | ◯

これを，仕切り | の左側の ◯ をⒶ，間の ◯ をⒷ，右側のの ◯ をⒸ と見る．すなわち

ⒶⒶ | ⒷⒷⒷⒷ | Ⓒ

と考えると，9 つの並べ方と，3 種類の玉の取り出し方が対応しているのがわかる．よって，求める重複組合せの総数は，先ほど求めた 36 通りである．

注意. 上の例題において，例えば，仕切りと仕切りが隣あっても問題はない．この場合，

ⒶⒶⒶⒶ | | ⒸⒸⒸ

のように，Ⓑ を選ばなかった場合と考えれば良い．

定義. 異なる n 個のもの（n 種類のもの）から，重複を許して r 個取る組合せの総数を ${}_n\mathrm{H}_r$ と表す．

注意. 重複組合せの総数 ${}_n\mathrm{H}_r$ では，n と r に大小関係は仮定していないことに注意する．すなわち $n < r$ であっても良い．上の具体例では，3 種類のものから 7 個を取り出す重複組合せを考えていたので，これを記号で表すと ${}_3\mathrm{H}_7 = 36$ となる．

次が成り立つ．

重複組合せの総数

$$ {}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

証明. ${}_n\mathrm{H}_r$ は定義から，n 個のもの（n 種類のもの）から，重複を許して r 個取る組合せの総数なので，上の具体例のように，r 個の ◯ と，$n-1$ 個の | の並べ方の総数を求めれば良いが，これは，$r+(n-1)$ カ所のうち ◯ を置く r カ所を選ぶ組合せの総数を考えることと同じなので，

$$ {}_{r+(n-1)}\mathrm{C}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

通りである．よって，結果が従う． □

補足. ${}_n\mathrm{H}_r$ の公式は複雑に見えるが，次のように ${}_n\mathrm{C}_r$ と対応させると覚えやすい．

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} \quad \text{：分子は,} n \text{ から減少していく } r \text{ 個の積} $$

$$ {}_n\mathrm{H}_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = \frac{n\cdot(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!} \quad \text{：分子は,} n \text{ から増加していく } r \text{ 個の積} $$

[1] 9 個の箱のうち，◯ を入れる 7 個の箱を選ぶと考えても良い．仕切り | は，残った 2 つの箱に入れれば良い．