重複順列

定義. 異なる n 個のものから，重複を許して，r 個を取り出して並べる順列を**重複順列**という．

注意. 一般的には，n 個のものから $\cdots$ という表現が使われるが，すぐ後に補足するように，重複順列の場合は，n 種類のものから $\cdots$ という方がイメージが湧きやすいかもしれない．重複を許すので，n 個しかないのではなくて，n 種類のものがそれぞれ沢山あるのである．

補足. 順列は，ビンゴゲームのような同じもの（番号）の入っていないところから，取り出して並べる並べ方（すなわち同じ番号が出ない）であったのに対して，重複順列は，おみくじ[1] のようなものと考えれば良い．３人がおみくじを引くとき，３人とも「大吉」が出る可能性もあり得るわけである．このような状態が，重複を許すということである．

ビンゴゲームとしては無駄が多いが，取り出したボールを戻してから，次を取り出すということを考えた場合には，後から同じ番号が出る可能性があるので，重複順列を考えることになる．

重複順列の総数が次の通りである．

重複順列の総数

異なる n 個のものから重複を許して r 個を取り出して並べる重複順列の総数は，

$$n^r$$

通りである．

証明. 重複を許すので，１回目，２回目，$\cdots$，r 回目の全ての場合において，その選び方が n 通りである．よって，求める重複順列の総数は，$n \times n \times \cdots \times n = n^r$ となる． □

重複順列が現れる例題をいくつか紹介しよう．

例.
- $1, 2, 3$ の３つの数字を並べて，5 桁の自然数を作る．ただし，同じ数を繰り返し使用して良いとする．このとき，作ることのできる自然数の総数を答えよ．
- ５人がジャンケンをするとき，グー，チョキ，パーの出し方は何通りあるか答えよ．
- ５人を，A, B, C の３部屋に分ける場合の分け方は何通りか答えよ．ただし，誰もいない部屋があっても良い．

解. 上の全ての例題の答えは，

$$3^5 = 243$$

である．考え方も全て同じなので解説する．どの例題も，３種類の玉を５つ並べる重複順列と考えられる．３種類の玉はそれぞれ，

- ①, ②, ③：$1, 2, 3$ の数字の書かれた玉，
- Ⓖ, Ⓒ, Ⓟ：グー (G), チョキ (C), パー (P) と手の出し方の書かれた玉，
- Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ：A, B, C と部屋の名前が書かれた玉

と考えることができ，並べる順番はそれぞれ，

- 1 の位，10 の位，$\cdots$ のように各位，
- 1 人目，2 人目，$\cdots$ のように手を出す人，
- 1 人目，2 人目，$\cdots$ のように部屋に入る人

というように対応させることで，重複順列の考え方が使えることがわかる． □

[1] もちろんどのくじも十分多く入っているとする．