楕円

定義. 平面上で，異なる 2 定点 F, F′ からの距離の和が一定である点 P の軌跡を**楕円**という．2 定点 F, F′ をその楕円の**焦点**という．ただし，和 PF + PF′（一定）は，2 定点の距離 FF′ より大きいとする．

楕円の方程式その 1

$c > 0$ とする．2 定点 $\mathrm{F}(c, 0)$，$\mathrm{F}'(-c, 0)$ を焦点とし，この 2 定点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

である．ただし，$a > c$ であり，$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ とおいた．$(a > b)$

証明. 楕円上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると，楕円の定義より，$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a$ なので，

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

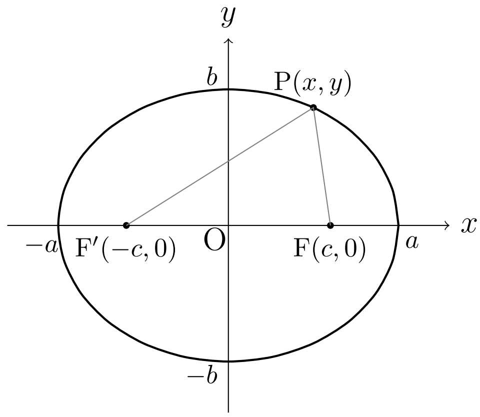
が成り立つ．$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ の両辺を 2 乗して整理することで，

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

を得が，再び，この両辺を 2 乗して整理し，

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

を得る．$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ から，$a^2 - c^2 = b^2$ とおき，両辺を a^2b^2 で割ることで，求める方程式を得る．
（仮定より，$a > b > 0$ であることに注意する．）



□

注意. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ と x 軸との交点は，$(a, 0)$，$(-a, 0)$ であるが，これは次のようにして分かる：点 $\mathrm{P}(x, 0)$ とする．楕円の方程式に $y = 0$ を代入することで，$x^2 = a^2$ を得る．これから，$x = \pm a$ が従う．y 軸との交点 $(0, b)$，$(0, -b)$ に関しても同様である．

楕円の方程式その 2

$c > 0$ とする．2 定点 $\mathrm{F}(0, c)$，$\mathrm{F}'(0, -c)$ を焦点とし，この 2 定点からの距離の和が $2b$ である楕円の方程式は，

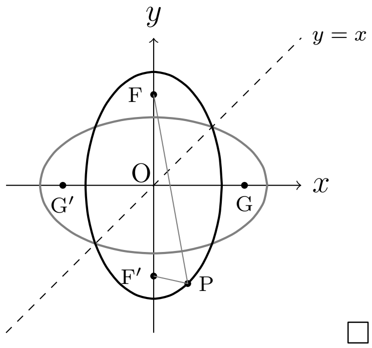
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

である．ただし，$b > c$ であり，$a = \sqrt{b^2 - c^2}$ とおいた．$(b > a)$

上と同様の方法で証明できるが，ここでは x 軸上に焦点を持つ楕円の対称移動を考えて証明する：
2 定点 $\mathrm{G}(c, 0)$，$\mathrm{G}'(-c, 0)$ を焦点とし，この 2 定点からの距離の和が $2b$ である楕円の方程式は，上の結果を用いると，

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

である．ここで，$b > c$ であり，$a = \sqrt{b^2 - c^2}$ とおいた．
求める楕円は，この楕円を直線 $y = x$ に関して対称移動させたものであるから，x と y の役割を入れ替えることで，結果が従う．（仮定より，$b > a > 0$ である．）



□

定義. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において，x 軸との２交点を $\mathrm{A}(a,0)$，$\mathrm{A}'(-a,0)$ とし，y 軸との２交点を $\mathrm{B}(0,b)$，$\mathrm{B}'(0,-b)$ とする．

- 焦点が，x 軸上にあるとき，すなわち，$a>b$ であるとき，
  線分 AA' をその楕円の長軸といい，線分 BB' を短軸という．
- 焦点が，y 軸上にあるとき，すなわち，$b>a$ であるとき，
  線分 BB' をその楕円の長軸といい，線分 AA' を短軸という．

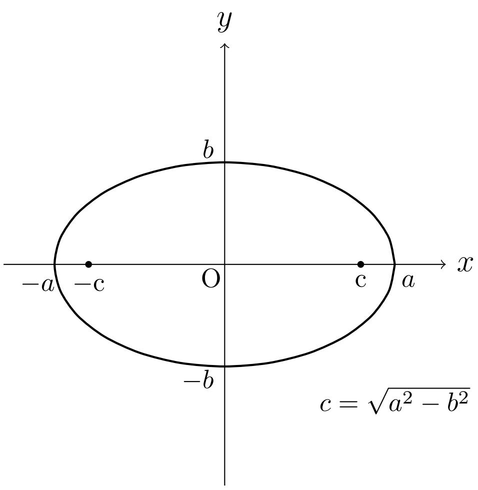
また，長軸と短軸の交点を楕円の**中心**という．

楕円の定義とは逆に，その方程式から分かる楕円の性質についてまとめておく．

楕円の性質

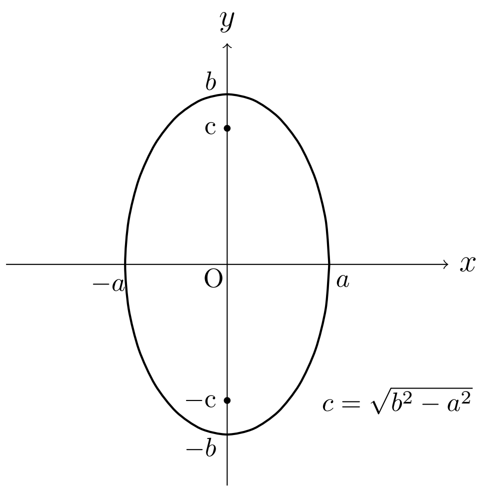
楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の性質は，a，b の大小関係によって，次のようになる．

- $a>b$ のとき，



焦点　：x 軸上の２点 $(\pm\sqrt{a^2-b^2},0)$
長軸の長さ：　$2a$　（距離の和）
短軸の長さ：　$2b$

- $b>a$ のとき，



焦点　：y 軸上の２点 $(0,\pm\sqrt{b^2-a^2})$
長軸の長さ：　$2b$　（距離の和）
短軸の長さ：　$2a$

楕円の平行移動も二次関数の場合と同様に考えられる．
楕円 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸の正の方向に p，y 軸の正の方向に q だけ平行移動させた楕円を E' とする．楕円 E' 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ を，x 軸の正の方向に $-p$，y 軸の正の方向に $-q$ だけ平行移動させた点 $(x-p,y-q)$ は，楕円 E 上の点であるから，E の方程式を満たす．よって，楕円 E' の方程式は，次のようになる．

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

長軸と短軸の長さは，明らかに楕円 E と同じであり，E の２焦点を $(\pm c,0)$ とすると，F の２焦点は $(\pm c+p,q)$ である．