



指数の拡張（整数の指数）

正の整数 n に対して、数 a を n 回かけた数は、 a^n で表され、 a を底、 n を指数というのであった。また次の指数法則が成り立つのであった。

指数法則（自然数の指数）

正の整数 m, n に対して、次が成り立つ。

$$1. a^m a^n = a^{m+n} \quad 2. (a^m)^n = a^{mn} \quad 3. (ab)^n = a^n b^n$$

証明. 定義から次のように計算できる。

$$\begin{aligned} 1. a^m a^n &= \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ 個の積}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ 個の積}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 2. (a^m)^n &= \underbrace{a^m \cdots a^m}_{n \text{ 個の積}} \\ &= a^{mn} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 3. (ab)^n &= \underbrace{ab \cdots ab}_{n \text{ 個の積}} \\ &= \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ 個の積}} \cdot \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ 個の積}} = a^n b^n \end{aligned}$$

□

上の指数法則 1. を注意深く見てみると、左辺の $a^m \times a^n$ という数の掛け算が、右辺では、 a^{m+n} という指数の足し算に変換されていると考えることができる。この

「数の積」 $\longleftrightarrow$ 「指数の和」

という対応を拡張し、

「数の商」 $\longleftrightarrow$ 「指数の差」

という対応を持つ指数法則を考えてみよう。

m, n は正の整数とし、 $m > n$ とする。このとき、次が成り立つ。

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdots a}^{m \text{ 個の積}}}{\underbrace{a \cdots a}_{n \text{ 個の積}}} = a^{m-n}$$

ここで、 $m > n$ という条件に注目する。もし $m = n$ であれば、右辺の指数が 0 となってしまうので、これは指数の定義外である。また $m < n$ の場合でも、右辺の指数が負の数になってしまうので、これも指数の定義外である。しかし、逆に、この等式を 0 や負の整数の指数の定義に採用することで、指数法則に矛盾することなく、0 や負の整数の指数を定義できることがわかる。（ただし、 $a \neq 0$ を仮定しなければならない。）すなわち、 $m = n$ の場合を考えることで、

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

を定義することができ、 $m = 0, n = -k$ ($k > 0$) の場合を考えることで、

$$a^{-k} = a^{0-k} = \frac{a^0}{a^k} = \frac{1}{a^k}$$

を定義できる。

0 や負の整数の指数の定義をまとめておく.

定義. $a \neq 0$, n を正の整数とする. このとき, 0 以下の整数の指数を次のように定める.

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

これにより, 底 $a \neq 0$ を仮定することで, 任意の整数の指数を考えることが可能になった. またその定義の仕方から, 整数の指数に対しても指数法則 1. が成り立つことも明らかである. 指数法則 2. と 3. が任意の整数の指数で

すなわち, 指数の定義域が, 自然数から整数に拡張されたのである.

改めて, 整数の指数法則をまとめておく.

指数法則 (整数の指数)

$a \neq 0, b \neq 0$ とする. 整数 m, n に対して, 次が成り立つ.

$$1. a^m a^n = a^{m+n}$$

$$2. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3. (ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

例. 指数法則を用いて, 次を計算しなさい.

$$1. a^3 \cdot (a^{-1})^{-2}$$

$$2. (b^2)^3 \cdot (b^3)^{-2}$$

$$3. (c^{-2})^3 \cdot (c^{-2})^{-2}$$

$$4. (-2ab^2c^{-2})^3 \cdot (3a^{-1}b^3c^{-2})^{-2}$$

解. 指数法則を繰り返し用いて, 次のように計算できる.

$$1. a^3 \cdot (a^{-1})^{-2} = a^3 \cdot a^{(-1)(-2)} = a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$$

$$2. (b^2)^3 \cdot (b^3)^{-2} = b^{2 \cdot 3} \cdot b^{3(-2)} = b^6 \cdot b^{-6} = b^{6-6} = b^0 = 1$$

$$3. (c^{-2})^3 \cdot (c^{-2})^{-2} = c^{-2 \cdot 3} \cdot b^{(-2)(-2)} = c^{-6} \cdot b^4 = c^{-6+4} = c^{-2} = \frac{1}{c^2}$$

$$4. (-2ab^2c^{-2})^3 \cdot (3a^{-1}b^3c^{-2})^{-2}$$

$$= (-2)^3 a^3 (b^2)^3 (c^{-2})^3 \cdot 3^{-2} (a^{-1})^{-2} (b^3)^{-2} (c^{-2})^{-2} \quad (\text{指数法則 3.})$$

$$= -8a^3 b^6 c^{-6} \cdot \frac{1}{3^2} a^2 b^{-6} c^4 \quad (\text{指数法則 2.} \cdot \text{定義})$$

$$= -\frac{8}{9} \cdot a^{3+2} b^{6-6} c^{-6+4} \quad (\text{指数法則 1.})$$

$$= -\frac{8}{9} \cdot a^5 b^0 c^{-2}$$

$$= -\frac{8a^5}{9c^2} \quad (\text{定義})$$

□