



指数の拡張（有理数の指数）

正の整数 n に対して, a^n は, 「 a を n 回かけた数」という形で定義されるのであったが, これに

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

という定義を追加することにより, 任意の整数 n に対して, a^n という数を考えられるようになり, 次の指数法則も成り立つのであった.

指数法則（整数の指数）

$a \neq 0, b \neq 0$ とする. 整数 m, n に対して, 次の法則が成り立つ.

$$1. a^m a^n = a^{m+n}$$

$$2. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3. (ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

ここでは, 累乗根を用いて, 指数の範囲を有理数にまで拡張する.

定義. a を正の実数とし, n を正の整数とする. このとき, a の $\frac{1}{n}$ 乗を次のように定義する.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

さらに, m を整数とすると, a の $\frac{m}{n}$ 乗を次のように定義する.

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \quad (1)$$

任意の有理数は $\frac{m}{n}$ の形で表すことができるので, これで全ての有理数に対して, その指数を定義することができた.

注意. ● 負の実数 a に対しても n が奇数であれば, $\sqrt[n]{a}$ は定義されていたが, 有理数の指数は, 底 a が正の実数の場合にしか定義されていないことに注意する.

● 上の定義の (1) は, 累乗根の性質を思い出すと, 次のように表すこともできる.

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

有理数の指数の定義と累乗根の性質を用いて, 有理数の指数に対しても指数法則が成り立つ事を確認しよう.

a を正の実数, $r = \frac{m_1}{n_1}, s = \frac{m_2}{n_2}$ を有理数とする. (m_1, m_2, n_1, n_2 は整数で, $n_1, n_2 \neq 0$) このとき, 指数法則 1. は, 次のように計算できる.

$$\begin{aligned} a^r a^s &= a^{\frac{m_1}{n_1}} a^{\frac{m_2}{n_2}} \\ &= \sqrt[n_1]{a^{m_1}} \sqrt[n_2]{a^{m_2}} && \text{(定義)} \\ &= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2}} \sqrt[n_2 n_1]{a^{m_2 n_1}} && \text{(累乗根の性質: } \sqrt[n^k]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \text{)} \\ &= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2} a^{m_2 n_1}} && \text{(累乗根の性質: } \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \text{)} \\ &= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}} && \text{(整数の指数法則)} \\ &= a^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}} && \text{(定義)} \\ &= a^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

同じ記号を用いて、指数法則 2. も次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
 (a^r)^s &= \left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}} \\
 &= \sqrt[n_2]{\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{m_2}} && \text{(定義)} \\
 &= \sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a^{m_1 m_2}}} && \text{(累乗根の性質: } (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \text{)} \\
 &= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}} && \text{(累乗根の性質: } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \text{)} \\
 &= a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}} && \text{(定義)} \\
 &= a^{rs}
 \end{aligned}$$

m_1, m_2 が負の数の場合にも同様に計算できる. また他の指数法則が成り立つことは明らかであろう.

改めて、有理数の指数に関する指数法則をまとめておく.

指数法則 (有理数の指数)

$a > 0, b > 0$ とする. 有理数 r, s に対して、次が成り立つ.

$$1. a^r a^s = a^{r+s}$$

$$2. (a^r)^s = a^{rs}$$

$$3. (ab)^r = a^r b^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

指数の拡張 (無理数の指数)

a を正の実数, s を無理数とする. 無理数 s に収束する有理数列 $s_1, s_2, s_3, \dots$ を用いて,

$$a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, \dots$$

が近づく値として, a^s を定義する. すなわち, 極限¹ の言葉を用いると, 次のように書ける.

$$a^s = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$$

例. $a > 0$ とする. 例えば, $a^{\sqrt{2}}$ は, $\sqrt{2} = 1.414\dots$ なので,

$$a^1, a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, \dots \longrightarrow a^{\sqrt{2}}$$

などのように定義される.

注意. 極限の性質を用いることで, 無理数の指数に対しても, 指数法則が成り立つことが確認できる.

ここで無理数の指数を定義する理由は, このあとに指数関数 ($y = a^x$ など) のグラフを描きたいからである. 無理数の指数を定義していないと, 実数全体を定義域とする指数関数のグラフを描くことができない. しかし上のように無理数の指数を定義することにより, 実数全体から実数全体への指数関数のグラフが描けるというだけでなく, グラフの連続性² も定義から明らかであるということになる.

¹極限は, 高校数学では数学Ⅲで学習する.

²直感的にはグラフが途切れていないということ.