指数方程式

定義. $a > 0, a \neq 1$ とする．指数関数 a^x を含む方程式を**指数方程式**という．

指数方程式の解法において，基本となる次の命題である．証明は，指数関数の単調性から明らかであろう．

命題. $a > 0, a \neq 1$ とする．このとき，次が成り立つ．

$$a^m = a^n \iff m = n$$

例. 次の指数方程式を解きなさい．

1. $5^x = 125$
2. $9^{2x+1} = 27^{x-1}$
3. $4^x + 2^{x+2} - 32 = 0$

解. 指数法則と上の命題に注意して，次のように方程式を解くことができる．

1. $125 = 5^3$ なので，$5^x = 5^3$ から，$x = 3$.
2. $9 = 3^2$，$27 = 3^3$ なので，
$$\begin{aligned} \left(3^2\right)^{2x+1} &= \left(3^3\right)^{x-1} \\ 3^{2(2x+1)} &= 3^{3(x-1)} \\ 3^{4x+2} &= 3^{3x-3} \end{aligned}$$
と計算できる．これから，
$$\begin{aligned} 4x+2 &= 3x-3 \\ x &= -5 \end{aligned}$$
3. $4^x = (2^x)^2$，$2^{x+2} = 2^2 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x$ に注意すると，
$$\begin{aligned} (2^x)^2 + 4(2^x) - 32 &= 0 \\ (2^x+8)(2^x-4) &= 0 \end{aligned}$$
と計算できる[1]．$2^x > 0$ なので，これから，
$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \\ 2^x &= 2^2 \end{aligned}$$
となり，$x = 2$.

□

このように，指数方程式の解法は，

底 a を揃えて，指数同士の等式を導く．

というのが基本的である．

[1]因数分解が見にくい場合でも，$t = 2^x > 0$ とおくと，$t^2 + 4t - 32 = (t+8)(t-4)$ のように計算できるだろう．