指数不等式

定義. $a>0, a\neq 1$ とする．指数関数 a^x を含む不等式を**指数不等式**という．

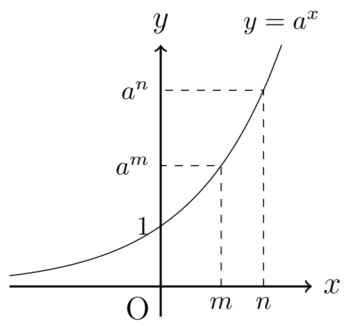
指数不等式の解法において，基本となるのは，次の命題である．

命題. $a>0, a\neq 1$ とする．このとき，次が成り立つ．

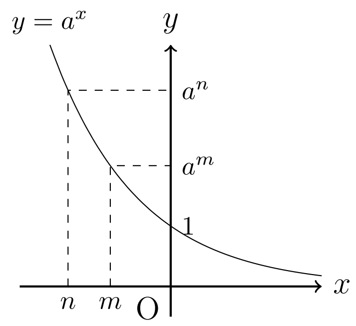
$$a>1 \text{ なら }, \quad a^m<a^n \iff m<n$$
$$0<a<1 \text{ なら }, \quad a^m<a^n \iff m>n$$

証明. 指数関数のグラフを思い出す．$a>1$ のときは，$y=a^x$ のグラフの単調増加性（左下図）から，また，$0<a<1$ のときは，$y=a^x$ のグラフの単調減少性（右下図）から，主張が従う．

- $a>1$ のとき，



- $0<a<1$ のとき，



□

例. 次の指数不等式を解きなさい．

1. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x<125$
2. $9^{2x+1}>27^{x-1}$
3. $4^x+2^{x+2}-32<0$

解. 指数法則と上の命題に注意して，次のように方程式を解くことができる．

1. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x<125 \iff 5^{-x}<5^3$ である．底 5 は 1 より大きいので，$-x<3$ から，$x>-3$.
2. $9^{2x+1}>27^{x-1} \iff 3^{4x+2}>3^{3x-3}$ である．
   底 3 は 1 より大きいので，$4x+2x>3x-3$ から，$x>-5$.
3. $4^x+2^{x+2}-32<0 \iff (2^x)^2+4(2^x)-32<0 \iff (2^x+8)(2^x-4)<0$ である．$2^x>0$ から，$2^x+8>0$ なので，
   $$2^x-4<0 \iff 2^x<2^2$$
   である．底 2 は 1 より大きいので，$x<2$.

□

注意. 例の 1. は，

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x<125 \iff \left(\frac{1}{5}\right)^x<\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$$

なので，底 $\frac{1}{5}$ が 1 より小さいことから，$x>-3$ と求めることもできる．

このように，指数不等式の解法は，（指数方程式と同様に，）

底 a を揃えて，指数同士の不等式を導く．

というのが基本的である．