関数の極値

関数の極値を定義する．極値とは大雑把にいうと，関数が増加から減少（または減少から増加）にうつる境目の点である．

定義. 連続関数 $y = f(x)$ について，$x = a$ の十分近くの点 $(x \neq a)$ で，

- $f(x) < f(a)$ が成り立つとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極大**であるといい，$f(a)$ を**極大値**という．
- $f(x) > f(a)$ が成り立つとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極小**であるといい，$f(a)$ を**極小値**という．

極大値と極小値を合わせて，**極値**という．

極値の定義から，次が成り立つ．

命題. 微分可能な関数 $f(x)$ において，次が成り立つ．

$$f(a) \text{ が極値} \Longrightarrow f'(a) = 0$$

証明. 微分可能な関数 $f(x)$ が，$x = a$ で極大であるとする．区間 I を

$$I = \{x \mid x \text{ は } a \text{ の十分近くの点}, x \neq a\}$$

と定めると，仮定から，全ての $x \in I$ に対して，

$$f(x) < f(a) \iff f(x) - f(a) < 0 \tag{1}$$

が成り立つ．I の部分集合 I_+，I_- をそれぞれ，

$$I_+ = \{x \in I \mid x > a\}, \quad I_- = \{x \in I \mid x < a\}$$

と定めると，$I = I_+ \cup I_-$ であり，(1) と合わせて，

- 全ての $x \in I_+$ に対して $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$
- 全ての $x \in I_-$ に対して $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$

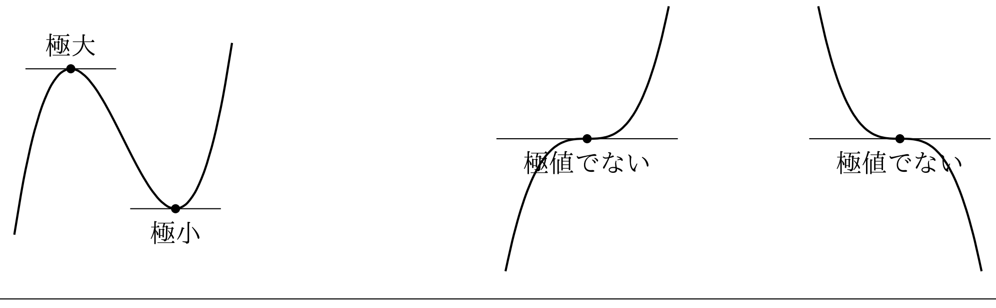
が成り立つ．さらに，$f(x)$ は $x = a$ で微分可能なので，$x = a$ における右側微分係数と左側微分係数が存在し，それらはそれぞれ次のように評価できる．

- $\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqq 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqq 0$

さらにこれらの微分係数は一致するので，$f'(a) \leqq 0$ かつ $f'(a) \geqq 0$ であり，$f'(a) = 0$ が従う．$f(x)$ が，$x = a$ で極小である場合も同様である． □

注意. 上の命題の逆は成り立たない．すなわち，$f'(a) = 0$ であっても，$f(a)$ が極値であるとは限らないことに注意する．[1]

上の命題と，その後の注意で述べたことを図で見ると次のようになる．



[1]逆は成り立たないとはいえ，実際には，$f'(x) = 0$ となる点（すなわち，極値の候補となる点）を見つけてから，それが極値がどうか判断することになる．これについて，詳しくは，https://gleamath.com/derivative-test02 を参照のこと．