剰余の定理と因数定理

まずは除法の原理を思いだす．

除法の原理

$A(x), B(x)$ を 0 でない整式とすると，次を満たす整式 $Q(x), R(x)$ が一意的に存在する．

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

ただし，$R(x)$ は 0 であるか $B(x)$ の次数より次数が低い整式である．

除法の原理から，$B(x)$ が 1 次式の場合，$R(x)$ は定数であることがわかる．これを用いて，次の剰余の定理が証明される．

剰余の定理

定理． 整式 $P(x)$ を 1 次式 $x - a$ で割ったときの余りは，$P(a)$ である．

証明．除法の原理から，整式 $P(x)$ と 1 次式 $x - a$ に対して，

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R(x) \tag{1}$$

を満たす整式 $Q(x), R(x)$ が存在するが，$R(x)$ の次数は，$x - a$ の次数より低いので，$R(x)$ は定数である．$R(x) = R$ とかく．上の等式に $x = a$ を代入して，

$$P(a) = (a - a)Q(x) + R(a) = 0 + R = R.$$

が従う． □

剰余の定理において，余りが 0 の場合を考えることで，次の因数定理を得ることができる．

因数定理

定理． 1 次式 $x - a$ が整式 $P(x)$ の因数であることと，$P(a) = 0$ であることは同値である．

証明．整式 $P(x)$ に対して，剰余の定理から，ある整式 $Q(x)$ が存在して，次が成り立つ．

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a).$$

$P(a)$ は定数なので，$x - a$ を因数に持つことはあり得ない．よって上の等式から，

$$x - a \text{ が } P(x) \text{ の因数} \iff P(a) = 0$$

が従う． □

これまで，$x - a$ のように最高次の係数が 1 である 1 次式を考えてきたが，$ax + b$ のような 1 次式についても同様の結果が得られることがわかる．これは，剰余の定理の証明の等式 (1) において，$x - a$ を $ax + b$ に書き換えることで簡単に確認できる．

$a \neq 0$ とする．1 次式 $ax + b$ と整式 $P(x)$ に対して次が成り立つ．

- $P(x)$ を $ax + b$ で割ったときの余りは，$P\left(-\frac{b}{a}\right)$ である．（剰余の定理）
- $ax + b$ が $P(x)$ の因数であることと，$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ であることは同値．（因数定理）