因数分解

定義.
- **因数分解**とは，ひとつの整式を整式の積の形で表す事をいう．
- 積を構成している各式を，もとの整式の**因数**という．
- **共通因数**とは，整式のすべての項に含まれる因数の事をいう．

例. 整式 $3x^2+21x+30$ について，共通因数は 3 であるので，$3x^2+21x+30=3(x^2+7x+10)$ と変形できる．（この操作を**共通因数をくくりだす**という．）さらに，$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$ が成り立つので，$3x^2+21x+30$ は，$3(x+2)(x+5)$ と因数分解できる．よって，$3x^2+21x+30$ の因数は，3，$x+2$，$x+5$ である．

因数分解の公式

1. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

   $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
2. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
3. $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
4. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

因数分解は，展開の逆の計算である．よって，因数分解の公式は，展開公式から導く事ができる．

1. b に $-b$ を代入した形，
   - $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
   - $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

   も覚えておくと良い．
3. $a=c=1$ の場合は，もっと簡単になる．
$$x^2+(b+d)x+bd=(x+b)(x+d)$$
4. b に $-b$ を代入した形も覚えておくと良い．
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

因数分解は，展開とは違い必ずできるとは限らない．また因数分解できる場合においても，効率良く計算を進めるために，次の基本方針を理解しておく事が大切である．

因数分解の基本方針

1. 共通因数をくくりだす．
2. 公式を利用数する．
   (a) 繰り返し現れる式はまとめる（置き換える）．
   (b) 次数が最低の文字について整理する．

原則 ：因数分解はできるところまで分解する．

定義. **対称式**とは，複数の文字を含む整式であって，どの二つの文字を入れ替えても，もとの式と同じになるようなものの事をいう．

例. a^2+b^2,　$a^3-5ab+b^3$,　$a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2$,　abc などは対称式である．

対称式のうち，次のようなものを**基本対称式**と呼ぶ．

- a, b の基本対称式は，$a+b$,　ab
- a, b, c の基本対称式は，$a+b+c$,　$ab+bc+ca$,　abc

対称式と基本対称式に関しては，次の事実が知られている．

> 対称式は，基本対称式で表す事ができる．

例. 次の等式は覚えておくと良い．

- $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
- $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
- $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
- $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$

因数分解をするにあたって次の事実を覚えておくと便利である．

> a, b, c の対称式は，$a+b$,　$b+c$,　$c+a$ のうちひとつが因数なら，他の二つも因数である．

定義. **交代式**とは，複数の文字を含む整式であって，どの二つの文字を入れ替えても，もとの式と符号だけが変わるようなものの事をいう．

例. a^2-b^2,　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$ などは交代式である．

因数分解をするにあたって次の事実を覚えておくと便利である．

> - a, b の交代式は，$a-b$ を因数にもつ．
> - a, b, c の対称式は，$(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数にもつ．

定義. **複 2 次式**とは，ax^4+bx^2+c の形の整式の事をいう．

複 2 次式の $x^2=X$ とおいて，X の 2 次式として，aX^2+bX+c を因数分解するのが基本であるが，普通の 2 次式とは違い，次のように「平方の差」の公式を用いて因数分解する事ができることもある．

例.

$$
\begin{aligned}
x^4+x^2+1 &= X^2+X+1 && (x^2=X \text{ とおいた．}) \\
&= (X+1)^2-X \\
&= (x^2+1)^2-x^2 && (A^2-B^2=(A+B)(A-B) \text{ を用いる．}) \\
&= (x^2+1+x)(x^2+1-x)
\end{aligned}
$$