三角形の五心（重心・垂心）

三角形において，次の条件件を満たす３本の直線は，必ず１点で交わることが知られている．

定理 (五心の決定)**.** 三角形において，次の３本の直線は，必ず１点で交わる．

1. ３本の中線（頂点から対辺の中点に引いた線）.
2. ３頂点から，対辺（またはその延長線）に下ろした垂線.

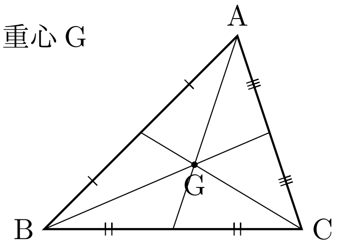
上の定理における交点は次のように呼ばれる．

定義. 三角形において，

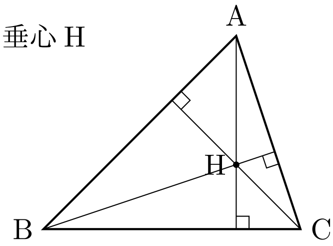
1. ３本の中線の交点を**重心**という．
2. ３頂点から，対辺（またはその延長線）に下ろした垂線の交点を**垂心**という．

外心，内心，重心，垂心，傍心をまとめて，**三角形の五心**という [1]．

重心 G



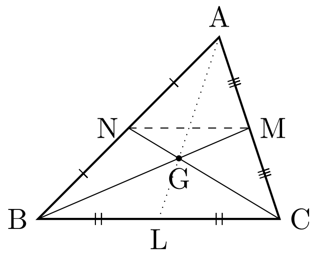
垂心 H



定理（五心の決定）の証明．△ABC において，

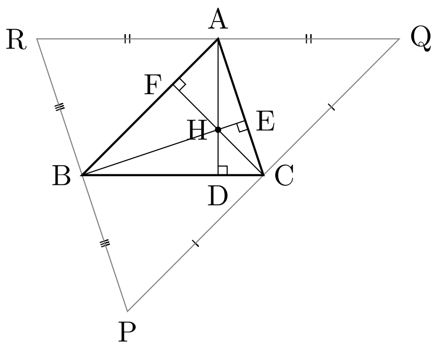
1. 辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とする．中線連結定理より，NM と BC は平行であり，NM : BC = 1 : 2 が成り立つ．BM と CN の交点を G とすると，△BCG と △MNG は相似であり，その相似比を考えることにより，

$$\mathrm{BG} : \mathrm{GM} = 2 : 1 \tag{1}$$



   が成り立つ．次に，BM と AL の交点を G′ として，同様に，中点連結定理を考えることで，BG′ : G′M = 2 : 1 が成り立つ．点 G，G′ は，どちらも線分 BM を 2 : 1 に内分する点なので一致することがわかる．

2. 頂点 A, B, C から，その対辺（またはその延長線）に下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする．また，各頂点 A, B, C を通り，それぞれの対辺に平行な直線の作る三角形の頂点を右図のように P, Q, R と定める．四角形 ABCQ と ACBR はどちらも平行四辺形なので，



$$\mathrm{AQ} = \mathrm{BC} = \mathrm{RA} \tag{2}$$

   が成り立つ．よって，AD は，線分 QR の垂直二等分線である．同様に考えて，BE，CF は，それぞれ線分 RP，QR の垂直二等分線である．よって，AD, BE, CF の交点は，△PQR の外心で交わる．

□

上の証明の比例式 (1) から，次が従う．

定理 (重心の性質)**.** 三角形の重心は，各中線を（頂点から）2 : 1 に内分する．

[1] 「三角形の五心（外心・内心・傍心）」https://gleamath.com/five-center-of-triangle01 も参照のこと．