正三角形の五心

三角形に対して，定義される五心と呼ばれる特別は５つの点が，正三角形に対してはどのようになるのかを考察する．まずは，五心の定義を思い出す[1]．

定義． 三角形において，

- ３つの辺の垂直二等分線の交点を**外心**という．
- ３つの内角の二等分線の交点を**内心**という．
- ３本の中線の交点を**重心**という．
- ３頂点から，対辺（またはその延長線）に下ろした垂線の交点を**垂心**という．
- １つの頂点の内角の二等分線と，他の２つの外角の二等分線の交点を**傍心**という．

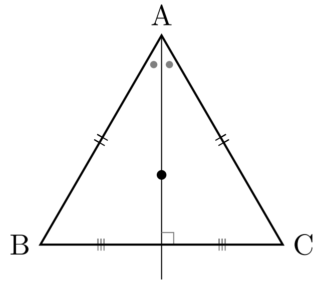
外心，内心，重心，垂心，傍心をまとめて，**三角形の五心**という．

次に証明するように，正三角形では，五心のうち傍心を除く４つの点が一致する．

定理． 正三角形において，外心，内心，重心，垂心は一致する．

証明．正三角形 △ABC を考える．△ABC を底辺が BC の二等辺三角形とみることにより，二等辺三角形の性質から，次の４直線は同じ直線であることがわかる．

- 辺 BC の垂直二等分線，
- 頂点 A の内角の二等分線，
- 頂点 A から対辺 BC に引いた中線，
- 頂点 A から対辺 BC 下ろした垂線．



同様に，正三角形 △ABC を，底辺が AC の二等辺三角形とみたときに，考えられる４種類の直線も同じであることがわかるので，これらの直線の交点として定義される外心，内心，重心，垂心は，一致することがわかる． □

また，正三角形の傍心は，次のような位置にあることもわかる．

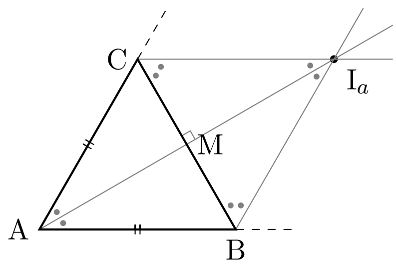
定理． 正三角形 △ABC において，頂角 A 内の傍心は，その対辺 BC に関して，頂点 A と対称な位置にある．他の頂角内の傍心についても同様である．

証明．頂角 A 内の傍心を I_a，辺 BC の中点を M とする．

上の定理の証明により，頂点 A の内角の二等分線は，対辺 BC の垂直二等分線である．よって，この直線は M を通り，$\angle\mathrm{CMI}_a$ は直角である．これと正三角形の１つの内角は 60° であることから，

$$\angle\mathrm{CAI}_a = 30^\circ,\ \angle\mathrm{CI}_a\mathrm{A} = 30^\circ$$

であり $\triangle\mathrm{CAI}_a$ は二等辺三角形である．よって，$\mathrm{AM} = \mathrm{MI}_a$ が従う．



他の頂角内の傍心についても同様である． □

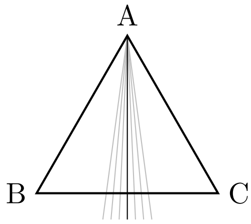
[1] 五心は全て，特別な３直線の交点として定義されている．これらの３直線が１点で交わることの証明は，「三角形の五心（外心・内心・傍心）」https://gleamath.com/five-center-of-triangle01 や，「三角形の五心（重心・垂心）」https://gleamath.com/five-center-of-triangle02 を参照．

上の定理の逆を考察する．すなわち，外心，内心，重心，垂心が一致する三角形は，正三角形であるかという問いを考える．これについては，４点が一致している必要はなく，２点が一致していれば十分であるというのが次の定理である．

定理．ある三角形において，外心，内心，重心，垂心のうち２点が一致するとき，この三角形は正三角形である．（すなわち，他の２点も一致する．）

補題．$\triangle\mathrm{ABC}$ において，頂点 A を通る直線であって，次の３つの性質のうち２つを満たすものが存在するとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ は，辺 BC を底辺とする二等辺三角形である．すなわち，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ である．

- （性質１）頂点 A の内角を二等分する．
- （性質２）辺 BC と垂直である．
- （性質３）辺 BC を二等分する．



証明．頂点 A を通る直線を ℓ とし，直線 ℓ と辺 BC の交点を P とする．$\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{ABP}$ を示せばよい．

直線 ℓ が性質１, ２を満たしていると仮定する．仮定から，$\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PAC}$ であり，$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{APC} = 90^\circ$ である．辺 AP が共通であるから $\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{ACP}$ が従う．

直線 ℓ が性質２, ３を満たしていると仮定する．仮定から，$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{APC} = 90^\circ$ であり，$\mathrm{BP} = \mathrm{CP}$ である．辺 AP が共通であるから $\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{ACP}$ が従う．

直線 ℓ が性質３, １を満たしていると仮定する．仮定から，$\mathrm{BP} = \mathrm{CP}$ であり，$\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PAC}$ なので，$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BP} : \mathrm{CP} = 1 : 1$ が成り立つ．よって，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ が従う．□

定理の証明．$\triangle\mathrm{ABC}$ において，その外心，内心，重心，垂心をそれぞれ，$\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{G}, \mathrm{H}$ とおく．

- 辺 BC の垂直二等分線を ℓ_{O} とすると，ℓ_{O} は，補題の性質２, ３を満たす．（頂点 A を通るかはわからない．）
- 頂点 A の内角の二等分線を ℓ_{I} とすると，ℓ_{I} は，頂点 A を通り，補題の性質１を満たす．
- 頂点 A から対辺 BC に引いた中線を ℓ_{G} とすると，ℓ_{G} は，頂点 A を通り，補題の性質３を満たす．
- 頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を ℓ_{H} とすると，ℓ_{H} は，頂点 A を通り，補題の性質２を満たす．

以上から，ℓ_{O}，ℓ_{I}，ℓ_{G}，ℓ_{H} のうち，２直線が一致していることを示せば，それは，頂点 A を通り，補題の３つの性質のうち２つを満たす直線であることがわかる．よって，補題から $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ が従う．また，どの場合においても，頂点 B と対辺 AC に対しても同様に考えることができ，これから，$\mathrm{BA} = \mathrm{BC}$ が従うので，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であることが従う．

それでは，仮定のもと２直線が等しいことを示そう．以下では，点 P と点 Q が等しいこと（異なること）を $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ （$\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$）などと表す．また，辺 BC の中点を M とする．

(i) $\mathrm{I} = \mathrm{G}$ のとき：ℓ_{I}，ℓ_{G} はどちらも，頂点 A と点 $\mathrm{I} = \mathrm{G}$ を通る（$\mathrm{A} \neq \mathrm{I} = \mathrm{G}$）ので，同じ直線である．

(ii) $\mathrm{I} = \mathrm{H}$ のとき：ℓ_{I}，ℓ_{H} はどちらも，頂点 A と点 $\mathrm{I} = \mathrm{H}$ を通る（$\mathrm{A} \neq \mathrm{I} = \mathrm{H}$）ので，同じ直線である．

(iii) $\mathrm{H} = \mathrm{G}$ のとき：ℓ_{H}，ℓ_{G} はどちらも，頂点 A と点 $\mathrm{H} = \mathrm{G}$ を通る（$\mathrm{A} \neq \mathrm{H} = \mathrm{G}$）ので同じ直線である．

(iv) $\mathrm{O} = \mathrm{G}$ のとき：ℓ_{O}，ℓ_{G} はどちらも，点 M と点 $\mathrm{O} = \mathrm{G}$ を通る（$\mathrm{M} \neq \mathrm{O} = \mathrm{G}$）ので同じ直線である．

(v) $\mathrm{O} = \mathrm{H}$ のとき：ℓ_{O}，ℓ_{H} はどちらも，辺 BC に垂直で，点 $\mathrm{O} = \mathrm{H}$ を通るので，同じ直線である．

外心 O と内心 I が一致する場合が残っている．これについては，外心の性質を使って，直接 $\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形であることを証明する．外心の性質から，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ が成り立つので，$\triangle\mathrm{AOB}$，$\triangle\mathrm{BOC}$，$\triangle\mathrm{COA}$ は全て二等辺三角形である．さらに，内心の定義から上の３つの三角形の底角が等しいので，これらは全て合同である．よって，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ が従う．□