整式の割り算と分数式

単項式と多項式を合わせて，整式いい，整式の和と積に関しては，次が成り立つのであった．

除法の原理

$A(x), B(x)$ を 0 でない整式とすると，次を満たす整式 $Q(x), R(x)$ が一意的に存在する．

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \tag{1}$$

ただし，$R(x)$ は 0 であるか $B(x)$ の次数より次数が低い整式である．

この結果により，整式の割り算における商と余りを次のように定義できる．

定義． 上の記号をそのまま用いる．整式 $A(x), B(x)$ に対して，等式 (1) が成り立つとき，

- 整式 $Q(x)$ を，$A(x)$ を $B(x)$ で割ったときの**商**といい，
- 整式 $R(x)$ を，$A(x)$ を $B(x)$ で割ったときの**余り**という．

特に，$R(x) = 0$ のときは，$A(x)$ は $B(x)$ で**割り切れる**という．

注意． 後で詳しく述べるが，上で定義した商は，<u>整式全体の集合</u>の中での割り算の結果という意味である．

具体的には，整式の割り算における商と余りは，次のように計算できる．

例． $A(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 5$，$B(x) = x^2 + 2x - 1$ とする．このとき，$A(x)$ を $B(x)$ で割ったときの商と余りを求めよ．

解．整数の割り算と同じような方法を用いて，次のように計算できる．

$$
\begin{array}{lll|rrrrr}
 & & & 3x^2 & -4x & +10 & & \\
\hline
x^2 & +2x & -1 & 3x^4 & +2x^3 & -x^2 & +4x & +5 \\
 & & & 3x^4 & +6x^3 & -3x^2 & & \\
\hline
 & & & & -4x^3 & +2x^2 & +4x & +5 \\
 & & & & -4x^3 & -8x^2 & +4x & \\
\hline
 & & & & & 10x^2 & & +5 \\
 & & & & & 10x^2 & +20x & -10 \\
\hline
 & & & & & & -20x & +15
\end{array}
$$

以上から，

$$A(x) = B(x) \cdot (3x^2 - 4x + 10) + (-20x + 15)$$

が成り立つ．よって，求める商は，$3x^2 - 4x + 10$ であり，余りは，$-20x + 15$ である． □

補足． 上のように，縦に次数を揃えて書くと間違いが少ない．

例えば，整数全体の集合の中であれば，$7 \div 3$ の商は 2，余りは 1 であるが，有理数全体の集合においては，$7 \div 3$ の商は $\frac{7}{3}$ である．上の例で見た

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 5 \quad \div \quad x^2 + 2x - 1 \tag{2}$$

の商が $3x^2 - 4x + 10$ で，余りが $-20x + 15$ であるというのは，<u>整式全体の集合</u>の中での定義である．有理数が，$\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$ のような，分数の形で表せる数であったのと同じように，分数式や有理式というものを次のように定義できる．

定義.
- $A(x)$ を整式，$B(x)$ を次数が正の整式[1] とするとき，$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ の形の式を**分数式**という．
- 整式と分数式を合わせて，**有理式**という．

例.

$$\frac{3x^4+2x^3-x^2+4x+5}{x^2+2x-1} \tag{3}$$

は分数式である．

注意. すぐ後で見るように，分数式に対しても四則演算が定義できる．これにより，有理式全体の集合においては，割り算 (2) の商は，分数式 (3) となる．

分数が約分できる（約分してもその値が変わらない）のと同じように，分数式についても，約分を定める．すなわち，約分して同じ形になる分数式は同じものと定める．

分数式の約分

整式 $A(x)$ と，次数が正の整式 $B(x)$，0 でない整式 $C(x)$ に対して，次が成り立つ．

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{A(x)\cdot C(x)}{B(x)\cdot C(x)}$$

- 右辺の形から，左辺の形に計算することを**約分する**といい，
- 約分ができない形の分数式を**既約分数式**という．

約分を定義したことにより，分数式に対しても，四則演算を定義できる．

分数式の四則演算

整式 $A(x),B(x)$ と，次数が正の整式 $C(x),D(x)$ に対して，分数式の四則演算を次のように定める．ただし，除法については，$B(x)$ の次数も正であるとする．

加法 $\dfrac{A(x)}{C(x)}+\dfrac{B(x)}{C(x)}=\dfrac{A(x)+B(x)}{C(x)}$，　減法 $\dfrac{A(x)}{C(x)}-\dfrac{B(x)}{C(x)}=\dfrac{A(x)-B(x)}{C(x)}$，

乗法 $\dfrac{A(x)}{C(x)}\times\dfrac{B(x)}{D(x)}=\dfrac{A(x)B(x)}{C(x)D(x)}$，　除法 $\dfrac{A(x)}{C(x)}\div\dfrac{B(x)}{D(x)}=\dfrac{A(x)}{C(x)}\times\dfrac{D(x)}{B(x)}=\dfrac{A(x)D(x)}{C(x)B(x)}$．

例. 次を計算せよ．

$$\frac{2}{x^2-4x+3}-\frac{1}{x^2-3x+2}$$

$$=\frac{2}{(x-1)(x-3)}-\frac{1}{(x-1)(x-2)} \tag{4}$$

$$=\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)(x-2)}-\frac{x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} \tag{5}$$

$$=\frac{2(x-2)-(x-3)}{(x-1)(x-3)(x-2)}$$

$$=\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x-3)(x-2)}$$

$$=\frac{1}{(x-3)(x-2)}$$

(4) 式から (5) 式の計算は，分数式の約分の逆の計算をしている．このように，加法や減法の計算を進めるために分母の整式を揃えることを**通分する**という．

注意. 分数式の四則演算の定義は少し複雑に見えるかもしれないが，上の例からもわかるように，分数式についても，分数と同じような計算ができるということを述べているだけである．また，分数の約分や通分において，素因数分解が重要であったのと同じように，分数式の約分や通分においては，因数分解が重要である．

[1]次数が正の整式とは，文字を含む整式のこと．言い換えると，0 でなく定数でもない整式のこと．