例. $f(x) = x^3 + ax^2 + 5x + 6$ とする．$f(x)$ が，$x^2 + x + a - 2$ を因数に持つように定数 a の値を定めよ．また，そのときの 3 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解を全て求めよ．

例. 次を計算せよ．

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

整式の割り算と因数分解

例. $f(x) = x^3 + ax^2 + 5x + 6$ とする．$f(x)$ が，$x^2 + x + a - 2$ を因数に持つように定数 a の値を定めよ．また，そのときの 3 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解を全て求めよ．

解. $f(x)$ を $x^2 + x + a - 2$ で割り，余りが 0 となるように定数 a を定めれば良い．

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x & +(a-1) & & \\
\hline
x^2 + x + (a-2) & x^3 & +ax^2 & +5x & +6 \\
 & x^3 & +x^2 & +(a-2)x & \\
\hline
 & & (a-1)x^2 & +(7-a)x & +6 \\
 & & (a-1)x^2 & +(a-1)x & +(a-1)(a-2) \\
\hline
 & & & (8-2a)x & +6-(a-1)(a-2)
\end{array}
$$

より，$(8-2a)x + 6 - (a-1)(a-2) = 0$ となるように a の値を定めれば良いから，$a = 4$ が従う．また，このとき，$f(x)$ は，

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = (x^2 + x + 2)(x + 3)$$

と因数分解できる． 2 次式 $x^2 + x + 2$ の判別式の値は負なので，$x^2 + x + 2 = 0$ は実数解を持たない．よって，$f(x) = 0$ の実数解は，$x + 3 = 0$ から得られる $x = -3$ のみである． □

分数式の計算

例. 次を計算せよ．

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

解. 分数式の通分を用いて，次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} \\
=\ & \frac{c-a}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{a-b}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
=\ & \frac{(c-a)+(a-b)+(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
=\ & 0
\end{aligned}
$$

□