関数のグラフの形

関数のグラフの形について考察する．まずは，言葉を定義する．

定義. 微分可能な関数 $y = f(x)$ と，その定義域内の区間 I に対して，任意の $u, v \in I$ $(u < v)$ をとる．

- 曲線 $y = f(x)$ が，区間 I で**下に凸**であるとは，次が成り立つときをいう．

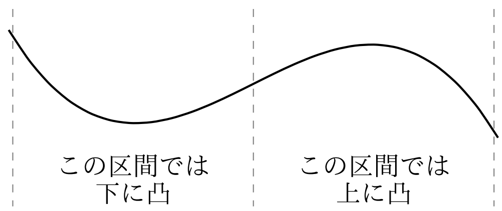
$$u < x < v \implies \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

- 曲線 $y = f(x)$ が，区間 I で**上に凸**であるとは，次が成り立つときをいう．

$$u < x < v \implies \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \geq \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

注意. $y = f(x)$ が，区間 I で上に凸であるとは，$y = -f(x)$ が，I で下に凸であることと同じである．

上で定義した，下に凸や上に凸とは，直感的には，右のような形のことを言っている．

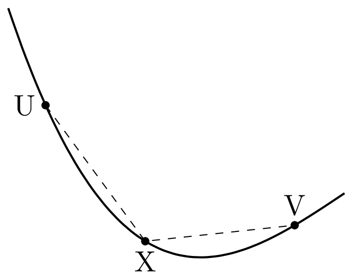


このことを詳しく見てみよう．曲線 $y = f(x)$ と，その定義域内の区間 I に対して，任意の $u, v \in I$ $(u < v)$ をとり，$u < x < v$ とする．3 点 $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{X}$ を，$\mathrm{U}(u, f(u))$，$\mathrm{V}(v, f(v))$，$\mathrm{X}(x, f(x))$ と定めると，定義の不等式に現れる

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u},\ \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

は，それぞれ，直線 UX，直線 XV の傾きである．下に凸であることの定義は，開区間 (u, v) 内のどのような x をとっても，

$$\text{直線 UX の傾き} \leq \text{直線 XVの傾き}$$



が成り立つと言っているのである．（右図を参照.）

次に曲線 $y = f(x)$ が下に凸であることを，様々な視点から見てみよう．以下で紹介する結果は，全て同値である．（すなわち，どれを定義と思っても同じことである.）

命題. 上と同じ記号を用いる．$y = f(x)$ が，区間 I で下に凸であるとは，次と同値である．

1. 任意の区間 $[u, v]$ 上で，曲線 $y = f(x)$ は，線分 UV の下側にある．
2. 接線の傾きが単調に増加する．すなわち，導関数 $f'(x)$ は，I 上で単調増加である．
3. I 上における接線は，常に曲線 $y = f(x)$ の下側にある．

証明の前に，まずは主張を整理しよう．主張 3. は，$0 < t < 1$ に対して，線分 UV の任意の内分点 R は，

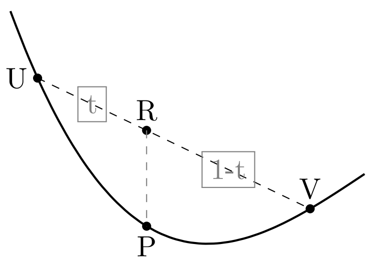
$$\mathrm{R}(\ (1-t)u + tv,\ (1-t)f(u) + tf(v)\ )$$

と書け，点 R と同じ x 座標を持つ曲線 $y = f(x)$ 上の点 P は，

$$\mathrm{P}(\ (1-t)u + tv,\ f((1-t)u + tv)\ )$$

と書けるから，このとき，

1. $f((1-t)u + tv) \leq (1-t)f(u) + tf(v)$ が成り立つ．



ということを主張している．

主張 2. は，単に

2. $u, v \in I$ $(u < v)$ なら，$f'(u) \leq f'(v)$ が成り立つ．

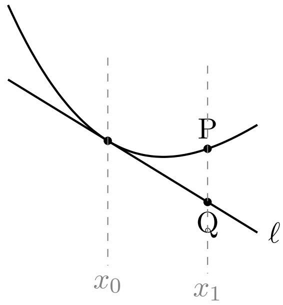
ということであり，主張 3. は，$x_0 \in I$ における接線を ℓ とすると，ℓ の方程式は，

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

と書けるので，接点でない ℓ 上の点（すなわち $x_1 \neq x_0$）

$$\mathrm{Q}(\ x_1,\ f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)\ )$$

と，同じ x 座標を持つ $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1, f(x_1))$ について，



3. $f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \leq f(x_1)$ が成り立つ．

ということを主張している．

証明．（定義 $\Leftrightarrow$1.）を示す．$u < x < v$ とすると，$0 < t < 1$ に対して，$x = (1-t)u + tv$ とおけるので，

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \frac{f((1-t)u + tv) - f(u)}{t(v - u)}, \quad \frac{f(v) - f(x)}{v - x} = \frac{f(v) - f((1-t)u + tv)}{(1-t)(v - u)}$$

と書き換えられる．これと定義の不等式から，

$$(1-t)(f((1-t)u+tv) - f(u)) \leq t(f(v) - f((1-t)u+tv)) \iff f((1-t)u+tv) \leq (1-t)f(u) + tf(v)$$

が従う．また簡単に逆を辿ることができるので同値性も従う．

（定義 $\Rightarrow$2.）を示す．$f(x)$ は微分可能であるから，区間 $[u, v]$ において，微分係数と片側微分係数が一致することに注意すると，

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \lim_{x \to v-0} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \lim_{x \to v-0} \frac{f(v) - f(x)}{v - x} = f'(v),$$
$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \lim_{x \to u+0} \frac{f(v) - f(x)}{v - x} \geq \lim_{x \to u+0} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = f'(u)$$

と評価できる．これらを合わせて，$f'(u) \leq f'(v)$ が従う．

（2.$\Rightarrow$3.）を示す．$x_0 < x_1$ の場合のみ証明する．（$x_0 > x_1$ のときも同じである．）

$$f(x_1) - \{f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)\} = (x_1 - x_0)\left\{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - f'(x_0)\right\} \tag{1}$$

と計算でき，平均値の定理から，$x_0 < c < x_1$ であって，$f'(c) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ を見たすものが存在する．さらに仮定から，$f'(x_0) \leq f'(c)$ が成り立つことに注意すると，(1) の続きを

$$(x_1 - x_0)\left\{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - f'(x_0)\right\} = (x_1 - x_0)(f'(c) - f'(x_0)) \geq 0$$

と計算でき，これから主張が従う．

（3.$\Rightarrow$ 定義）を示す．主張 3. の不等式を，

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) \leq f(x_1) - f(x_0) \tag{2}$$

と変形しておく．$u < x < v$ とする．不等式 (2) において，$(x_0, x_1) = (x, u)$ とすることで，

$$f'(x)(u - x) \leq f(u) - f(x) \iff f'(x) \geq \frac{f(x) - f(u)}{x - u}$$

と評価でき，$(x_0, x_1) = (x, v)$ とすることで，

$$f'(x)(v - x) \leq f(v) - f(x) \iff f'(x) \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

と評価できる．よって，これらから，$\dfrac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq f'(x) \leq \dfrac{f(v) - f(x)}{v - x}$ が従う．　□