$\frac{1}{6}$ 面積公式の一般化

曲線と（接線などの）直線で囲まれる部分の面積を求めるための公式として，$\frac{1}{6}$ 公式を筆頭に，たくさんの面積公式が存在している[1]．本稿では，これら形の似ている面積公式の一般化を図る．まず，実定数 $\alpha,\ \beta$ と，非負整数 m, n に対して，

$$I(m,n) = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\ dx$$

とおく．注釈に挙げた面積公式を導くために，$I(m,n)$ のような積分を計算していたのであった．ここで，$n > 0$ に対して部分積分法を用いて，

$$\begin{aligned} I(m,n) &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\ dx \\ &= \frac{1}{m+1}\Big[(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^n\Big]_\alpha^\beta - \frac{n}{m+1}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}\ dx \\ &= -\frac{n}{m+1} I(m+1, n-1) \end{aligned}$$

と計算できるので，帰納的にして，

$$I(m,n) = (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} I(m+n, 0) = (-1)^n \frac{n!m!}{(m+n)!} I(m+n, 0)$$

が従う．最後に，

$$I(m+n,0) = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\ dx = \frac{1}{m+n+1}\Big[(x-\alpha)^{m+n+1}\Big]_\alpha^\beta = \frac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

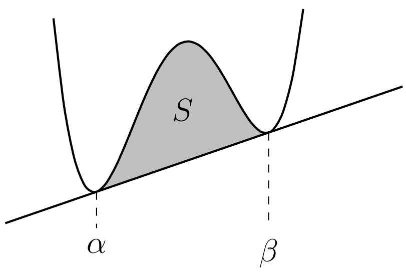
であることと合わせると，次の公式を得ることができる．

$$\boxed{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\ dx \ = \ (-1)^n \frac{n!m!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

容易にわかるように，(m,n) の値に対応して，次のように面積公式を得ることができる．

- $(m,n) = (1,1)$: $\frac{1}{6}$ 公式，
- $(m,n) = (2,1)$: $\frac{1}{12}$ 公式，
- $(m,n) = (2,0)$: $\frac{1}{3}$ 公式

さらに，例えば，右図のような，4 次曲線とその二重接線で囲まれる部分の面積は，$(m,n) = (2,2)$ の場合であり，



$$S = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2\ dx = \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

と計算できる．これが $\frac{1}{30}$ 公式と呼ばれる公式である．

---

[1] 面積公式たち

- $\frac{1}{6}$ 公式（放物線と直線）https://gleamath.com/one-sixth-formula
- $\frac{1}{12}$ 公式 (三次曲線と接線)https://gleamath.com/one-twelfth-formula01
- $\frac{1}{3}$ 公式（放物線と接線）https://gleamath.com/one-third-formula