



指数関数とそのグラフ

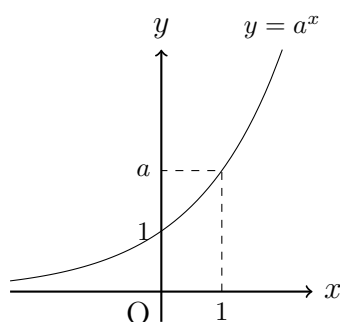
定義. $a > 0, a \neq 1$ とする. このとき, 関数 $y = a^x$ を x の指数関数といい, a をその底という.

例. $y = 2^x$ や, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ は, x の指数関数であり, その底は, それぞれ, 2 と $\frac{1}{3}$ である.

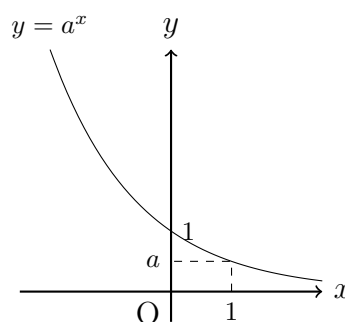
指数関数の定義域は実数全体とする. 指数関数のグラフは, 底 a の値に注意して, 次のように描くことができる.

指数関数のグラフ

• $a > 1$ のとき,



• $0 < a < 1$ のとき,



指数関数の性質を述べるために, いくつか言葉を定義する.

定義. 関数 $y = f(x)$ において, x の値が増加 (減少) すると y の値が増加 (減少) するとき, 関数 $y = f(x)$ は単調増加 (減少) であるという. すなわち, 次のように定義する.

- $y = f(x)$ が単調増加 $\iff x_1 < x_2$ ならば, $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つ.
- $y = f(x)$ が単調減少 $\iff x_1 < x_2$ ならば, $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つ.

定義. 曲線が限りなくある直線に近づくとき, その直線を曲線の漸近線という.

指数関数の性質

指数関数 $y = a^x$ について, 次が成り立つ.

1. 値域は正の実数全体である.
2. $a > 1$ のとき単調増加であり, $0 < a < 1$ のとき単調減少である.
3. グラフは点 $(0, 1)$ を通る.
4. x 軸はグラフの漸近線である.

証明. 1. 任意の実数 x に対して, $a^x > 0$ が成り立つことからわかる.

2. 上で描いた指数関数のグラフより確認できる.

3. $a > 0, a \neq 0$ に対して, $a^0 = 1$ であることから従う.

4. $a > 1$ のときを考える. $-x = x'$ とおくと, $y = a^x = a^{-x'} = \frac{1}{a^{x'}}$ である. x の値を限りなく小さくすると, x' の値は限りなく大きくなるので, このとき, y の値は限りなく 0 に近づく. すなわち, 曲線 $y = a^x$ は限りなく x 軸に近づく. $0 < a < 1$ の場合も同様である.

□

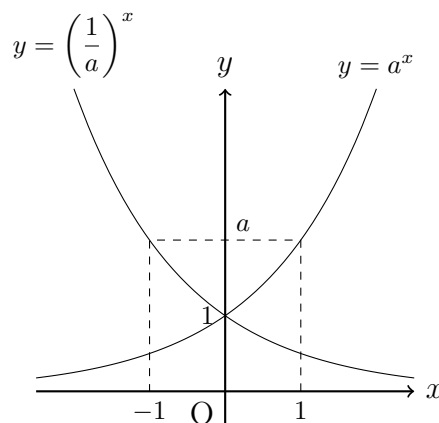
指数関数のグラフの対称性について考察する.

注意. 一般に, $y = f(x)$ のグラフと, $y = f(-x)$ のグラフは y 軸に関して対称である.

$a > 1$ として, $f(x) = a^x$ とする.

$$f(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

なので, $y = a^x$ のグラフと, $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ のグラフは, y 軸に関して対称である.



例. $y = 5^x$ のグラフと, $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ のグラフは, y 軸に関して対称である.

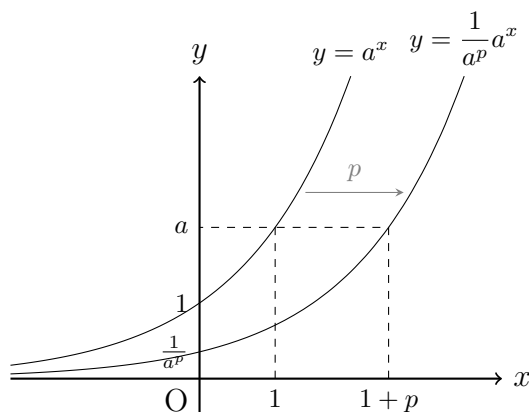
次に, 指数関数のグラフの平行移動について考察する.

注意. 一般に, $y = f(x - p)$ のグラフは, $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したグラフである.

$a > 1$ として, $f(x) = a^x$ とする.

$$f(x - p) = a^{x-p} = \frac{1}{a^p} a^x$$

なので, $y = \frac{1}{a^p} a^x$ のグラフは, $y = a^x$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したグラフである. (右図は $p > 0$ の場合)



例. • $y = \frac{2^x}{8}$ のグラフは, $y = 2^x$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したグラフである. これは次の計算から確認できる.

$$\frac{2^x}{8} = \frac{2^x}{2^3} = 2^{x-3}$$

• $y = \frac{9}{3^x}$ のグラフは, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフである. これは次の計算から確認できる.

$$\frac{9}{3^x} = \frac{3^2}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$