## 対数関数とそのグラフ

$a>0, a\neq 1$ とする．正の実数 $M$ に対して，$M=a^p$ を満たすただ 1 つの実数 $p$ を，$\log_a M$ と定義したのであった．すなわち，

$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

が成り立つのであった．よって，$y=\log_a x$ は，定義域を正の実数全体とする $x$ の関数であり，その定義から，指数関数 $y=a^x$ の逆関数であることもわかる．

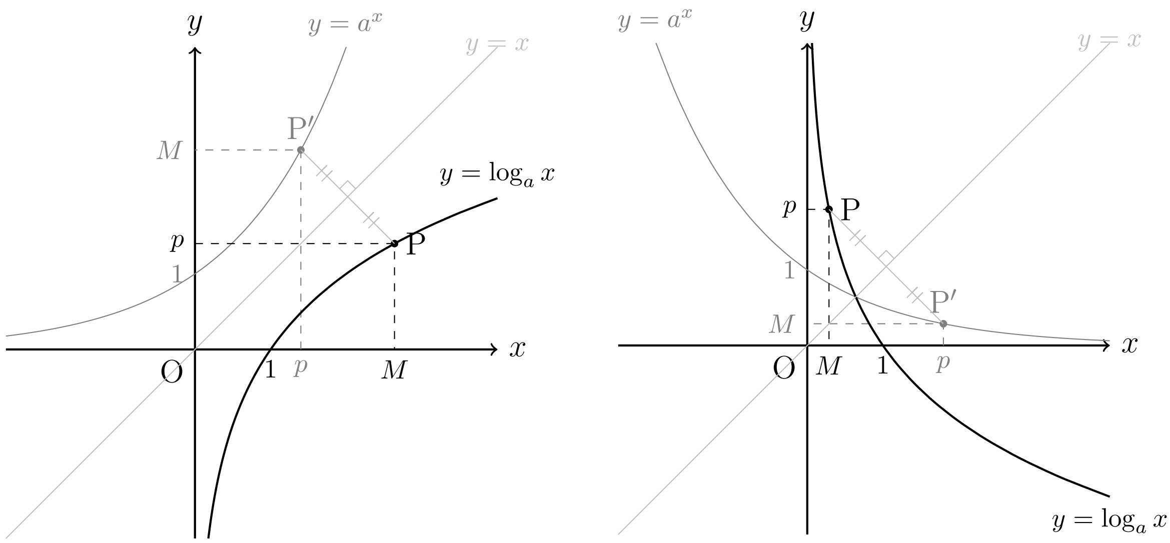
**定義．** $a>0, a\neq 1$ とする．関数 $y=\log_a x$ を $a$ を**底**とする $x$ の**対数関数**という．

対数関数 $y=\log_a x$ のグラフを描こう．$y=\log_a x$ 上の任意の点を $\mathrm{P}(M, p)$ とすると，

$$p = \log_a M \iff a^p = M$$

が成り立つので，$\mathrm{P}'(p, M)$ は，指数関数 $y=a^x$ 上の点である．２点 P，P$'$ はその座標から，直線 $y=x$ について対称なので，対数関数 $y=\log_a x$ のグラフと，指数関数 $y=a^x$ のグラフは，直線 $y=x$ について対称である[1]．この事実を用いて，対数関数のグラフは次のように描くことができる．

- $a>1$ のとき，
- $0<a<1$ のとき，




対数関数は次の性質を持つ．いずれもグラフの形から明らかであろう．

**対数関数の性質**

対数関数 $y=\log_a x$ について，次が成り立つ．

1. 値域は実数全体である．
2. $a>1$ のとき単調増加であり，$0<a<1$ のとき単調減少である．
3. グラフは点 $(1, 0)$ を通る．
4. $y$ 軸はグラフの漸近線である．

[1] 逆関数の関係にある 2 つの関数のグラフは，直線 $y=x$ について対称である．

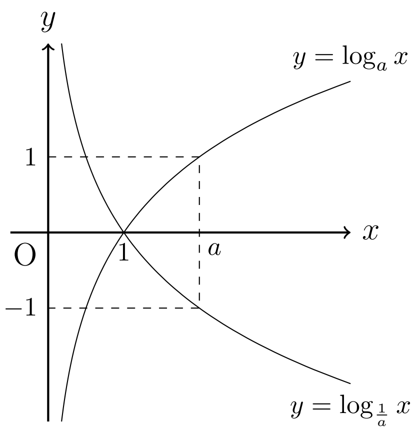
対数関数のグラフの対称性について考察する．

**注意．** 一般に，$y=f(x)$ のグラフと，$y=-f(x)$ のグラフは $x$ 軸に関して対称である．

$a>1$ として，$f(x)=\log_a x$ とする．$\log_{\frac{1}{a}} x$ は，対数の性質（底の変換公式）を用いると，

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{a}} x &= \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{\log_a a^{-1}} \\ &= \frac{\log_a x}{-\log_a a} = \frac{\log_a x}{-1} = -f(x)\end{aligned}$$

と計算できる．よって，$y=\log_a x$ のグラフと，$y=\log_{\frac{1}{a}} x$ のグラフは，$x$ 軸に関して対称である．




**例．** $y=\log_5 x$ のグラフと，$y=\log_{\frac{1}{5}} x$ のグラフは，$x$ 軸に関して対称である．

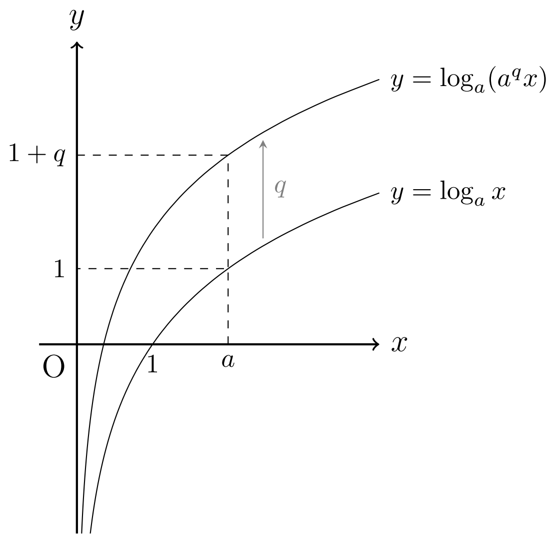
次に，対数関数のグラフの平行移動について考察する．

**注意．** 一般に，$y=f(x)+q$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを $y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動したグラフである．

$a>1$ として，$f(x)=\log_a x$ とする．

$$\begin{aligned}f(x)+q &= \log_a x + q\log_a a \\ &= \log_a x + \log_a a^q \\ &= \log_a (a^q x)\end{aligned}$$

なので，$y=\log_a(a^q x)$ のグラフは，$y=\log_a x$ のグラフを $y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動したグラフである．（右図は $q>0$ の場合）




**例．**

- $y=\log_2 8x$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを $y$ 軸方向に 3 だけ平行移動したグラフである．これは次の計算から確認できる．

$$\log_2 8x \;=\; \log_2 2^3 x \;=\; \log_2 2^3 + \log_2 x \;=\; 3+\log_2 x$$

- $y=\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x}{9}$ のグラフは，$y=\log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフを $y$ 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフである．これは次の計算から確認できる．

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9} \;=\; \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 x \;=\; \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \log_{\frac{1}{3}} x \;=\; 2+\log_2 x$$