三角関数のグラフ　拡大縮小と平行移動

三角関数は，周期関数[1] であった．

- 関数 $y = \sin x$ は，周期関数であり，その周期は 2π である．
- 関数 $y = \cos x$ は，周期関数であり，その周期は 2π である．
- 関数 $y = \tan x$ は，周期関数であり，その周期は π である．

よって，三角関数のグラフは，その周期ごとに同じ形が繰り返されるのであった．

一般の周期関数に対して，次が成り立つ．

命題． 関数 $f(x)$ を周期 p を持つ周期関数とする．このとき，$k \neq 0$ に対して，関数 $f(kx)$ は，周期 $\dfrac{p}{|k|}$ を持つ周期関数である．

証明．$g(x) = f(kx)$ として，$g(x)$ が，周期 $\dfrac{p}{|k|}$ を持つ周期関数であることを示す．仮定より，任意の x に対して，

$$g\left(x + \frac{p}{|k|}\right) = f(kx \pm p) = f(kx) = g(x)$$

が成り立つ．ただし，$\pm p$ は，$k > 0$ のとき $+p$，$k < 0$ のとき $-p$ である．

あとは，$\dfrac{p}{|k|}$ が，このような性質を持つ正の数の中で最小であることを言えば良い．そのために，$0 < l < \dfrac{p}{|k|}$ であって，任意の x に対して，$g(x+l) = g(x)$ を満たす l が存在したと仮定する．$p' = |k|l$ とおくと，$0 < p' < p$ である．任意の x に対して，ある y が存在して，$x = ky$ と書けることに注意すると，

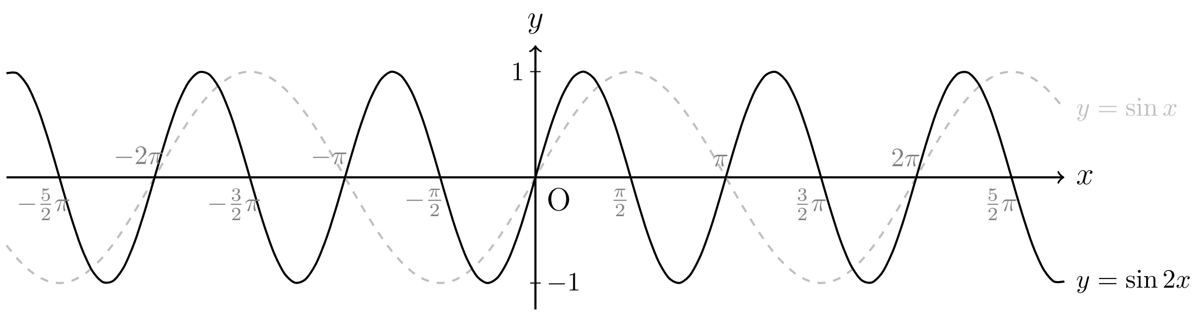
$$f(x + p') = f(x + |k|l) = f(ky + |k|l) = g(y \pm l) = g(y) = f(ky) = f(x)$$

となり，$f(x)$ の周期が p であることに矛盾する．よって，このような周期 l は存在しない． □

上の命題から，次が従う．

- 関数 $y = \sin kx$ は，周期関数であり，その周期は $\dfrac{2\pi}{|k|}$ である．
- 関数 $y = \cos kx$ は，周期関数であり，その周期は $\dfrac{2\pi}{|k|}$ である．
- 関数 $y = \tan kx$ は，周期関数であり，その周期は $\dfrac{\pi}{|k|}$ である．

例． $y = \sin 2x$ のグラフの周期は，π である．



[1] 任意の x に対して，0 でない定数 p が存在して，$f(x+p) = f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ のこと．また，このような p のうち，正で最小のものを，その周期関数の周期という．

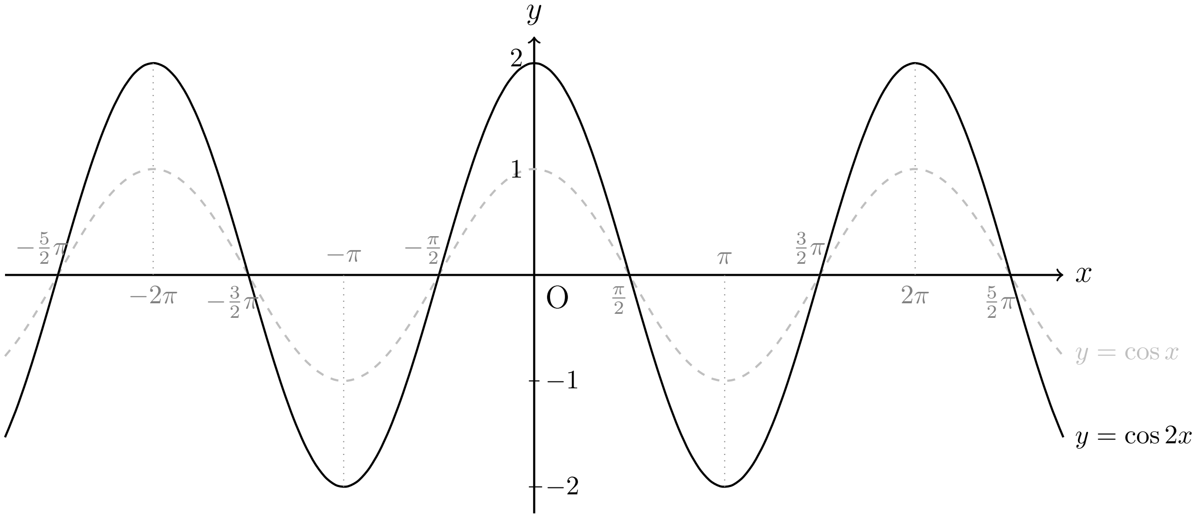
三角関数の定義から，任意の x に対して，

- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$

が成り立つのであった．これから，次が従う．

> 任意の x と，$k \neq 0$ に対して，
>
> - $-k \leq k\sin x \leq k$
> - $-k \leq k\cos x \leq k$
>
> が成り立つ．

例．$y = 2\cos x$ のグラフ



また，これまでに学んだ関数のグラフと同様に，三角関数のグラフの平行移動も考えることができる．

> $y = f(x)$ を三角関数とする．このとき，
>
> $$y = f(x - p) + q$$
>
> のグラフは，もとのグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させたグラフである．

例．$y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ のグラフ