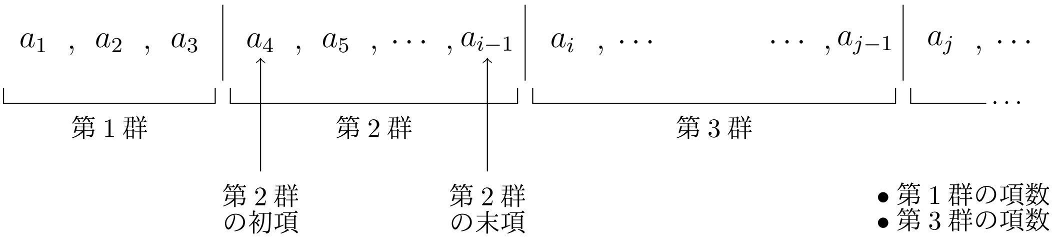
群数列の初項を並べた数列

定義.
- 数列をある規則に従っていくつかの組に分けるとき，この組の列を**群数列**という．
- $1, 2, \cdots$ 番目の組をそれぞれ，**第 1 群，第 2 群**，$\cdots$ という．
- 第 n 群に含まれる（元の）数列の項のうち，最後の項を**第 n 群の末項**という．
- 第 n 群に含まれる（元の）数列の項のうち，初めの項を**第 n 群の初項**という．
- 第 n 群に含まれる（元の）数列の項の数を，**第 n 群の項数**という．



数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ をいくつかの組に分け，群数列を考える．この群数列の第 n 群の項数を m_n，として，数列 $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める．このとき，第 k 群の初項は，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の第 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} m_i + 1$ 項の数である．すなわち，各群の初項を並べた数列は，

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \qquad n_k = \sum_{i=1}^{k-1} m_i + 1$$

と表すことができる．

本稿では，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，特別な場合に，数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ がどのような数列になるのかを考察する．結論を先に述べると，次のような関係が得られる．

	数列 $\{m_n\}_{k=1}^{\infty}$ が等差数列	数列 $\{m_n\}_{k=1}^{\infty}$ が等比数列
数列 $\{a_n\}_{k=1}^{\infty}$ が等差数列	$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の階差数列が等差数列	$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の階差数列が等比数列
数列 $\{a_n\}_{k=1}^{\infty}$ が等比数列	$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の階比数列が等比数列	本稿の最後を参照．

まずは，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関して，場合分けする．

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等差数列である場合．
  初項を a，公差を d とすると，一般項は，$a_n = a + (n-1)d$ と表せる．よって，このとき，数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項は，次のように表せる．

$$a_{n_k} = a + (n_k - 1)\,d = a + \left(\sum_{i=1}^{k-1} m_i + 1 - 1\right) d = a + \sum_{i=1}^{k-1} d m_i. \tag{1}$$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等比数列である場合．
  初項を a，公比を r とすると，一般項は，$a_n = ar^{n-1}$ と表せる．よって，このとき，数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項は，次のように表せる．[1]

$$a_{n_k} = ar^{n_k - 1} = ar^{\sum_{i=1}^{k-1} m_i + 1 - 1} = ar^{\sum_{i=1}^{k-1} m_i} = a \prod_{i=1}^{k-1} r^{m_i}. \tag{2}$$

---

[1] 記号 $\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} r^{m_i}$ は，$\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} r^{m_i} = r^{m_1} r^{m_2} \cdots r^{m_{k-1}}$ という積の記号である．

各群の初項を並べた数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の階差数列 $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$，階比数列 $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ をそれぞれ，

$$b_k = a_{n_{k+1}} - a_{n_k}, \qquad c_k = \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}}$$

で定める．（ただし，階比数列を考える場合は，任意の k に対して $a_{n_k} \neq 0$ であるとする．）

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等差数列（$a_n = a + (n-1)d$）である場合．
  数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項 (1) より，階差数列 $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項は，次のように表せる．

$$b_k = a_{n_{k+1}} - a_{n_k} = a + \sum_{i=1}^{k} dm_i - \left(a + \sum_{i=1}^{k-1} dm_i\right) = dm_k. \tag{3}$$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等比数列（$a_n = ar^{n-1}$）である場合．
  数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項 (2) より，階比数列 $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項は，次のように表せる．

$$c_k = \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} = \frac{a\prod_{i=1}^{k} r^{m_i}}{a\prod_{i=1}^{k-1} r^{m_i}} = r^{m_k}. \tag{4}$$

次に，数列 $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関して，場合分けする．

- $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等差数列である場合．
  初項を m，公差を e とすると，一般項は，$m_n = m + (n-1)e$ と表せる．
  - さらに，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等差数列（$a_n = a + (n-1)d$）なら，各群の初項を並べた数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の階差数列 $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項は，(3) より，

    $$b_k = dm_k = d\{m + (k-1)e\} = dm + (k-1)de$$

    と表せる．よって，<u>数列 $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ は，初項 dm，公差 de の等差数列</u>である．
  - また，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等比数列（$a_n = ar^{n-1}$）なら，各群の初項を並べた数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の階比数列 $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項は，(4) より，

    $$c_k = r^{m_k} = r^{\{m+(k-1)e\}} = r^m r^{(k-1)e} = r^m \left(r^e\right)^{k-1}$$

    と表せる．よって，<u>数列 $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ は，初項 r^m，公比 r^e の等比数列</u>である．

- $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等比数列である場合．
  初項を m，公差を s とすると，一般項は，$m_n = ms^{n-1}$ と表せる．
  - さらに，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等差数列（$a_n = a + (n-1)d$）なら，各群の初項を並べた数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の階差数列 $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項は，(3) より，

    $$b_k = dm_k = d(ms^{k-1}) = dms^{k-1}$$

    と表せる．よって，<u>数列 $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ は，初項 dm，公比 s の等比数列</u>である．
  - また，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等比数列（$a_n = ar^{n-1}$）なら，各群の初項を並べた数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の階比数列 $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項は，(4) より，

    $$c_k = r^{m_k} = r^{ms^{k-1}} = r^m r^{\left(s^{k-1}\right)}$$

    と表せる．一般に，<u>このとき，数列 $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ は，等差数列でも等比数列でもない．</u>