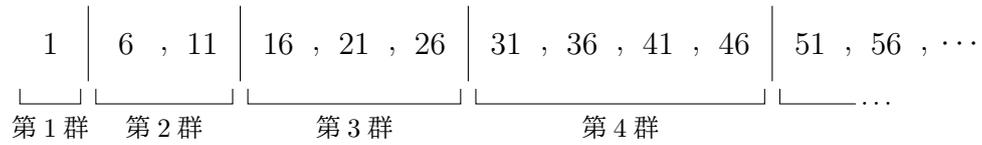




問題. 初項が1, 公差が5の等差数列を, 次のような群に分ける. ただし, 第 $n$ 群には $n$ 個の数が入るものとする.



このとき, 各群の最初の数を並べた数列

$$1, 6, 16, 31, 51, \dots$$

の階差数列の一般項を求めよ.

## 群数列と階差数列

問題. 初項が1, 公差が5の等差数列を, 次のような群に分ける. ただし, 第 $n$ 群には $n$ 個の数が入るものとする.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & | & 6, 11 & | & 16, 21, 26 & | & 31, 36, 41, 46 & | & 51, 56, \dots \\ \hline \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \dots \\ \text{第1群} & & \text{第2群} & & \text{第3群} & & \text{第4群} & & \end{array}$$

このとき, 各群の最初の数を並べた数列

$$1, 6, 16, 31, 51, \dots$$

の階差数列の一般項を求めよ.

解答. 初項1, 公差5の等差数列を $\{a_n\}$ とすると, その一般項は,

$$a_n = 1 + 5(n - 1) = 5n - 4 \quad (1)$$

と表せる. 第 $n$ 群には $n$ 個の数が入るという仮定から,  $n \geq 2$ に対して, 第 $n - 1$ 群の最後の数は, 数列 $\{a_n\}$ の第

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{1}{2}n(n - 1)$$

項の数であり, これから, 第 $n$ 群の最初の数は, 数列 $\{a_n\}$ の第

$$\frac{1}{2}n(n - 1) + 1$$

項の数である. これは,  $n = 1$ の時も成り立つ. よって, (1)から, 第 $n$ 群の最初の数は,

$$5 \left\{ \frac{1}{2}n(n - 1) + 1 \right\} - 4 = \frac{5}{2}n(n - 1) + 1 \quad (2)$$

と表せる.

各群の最初の数を並べた数列を $\{b_n\}$ とすると, (2)から, その一般項は,

$$b_n = \frac{5}{2}n(n - 1) + 1$$

である. この数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると,

$$c_n = b_{n+1} - b_n = \left\{ \frac{5}{2}(n + 1)n + 1 \right\} - \left\{ \frac{5}{2}n(n - 1) + 1 \right\} = 5n$$

が成り立つ. これが求める一般項である. □

一般に次が成り立つ<sup>1</sup>:

公差が $d$ の等差数列を, 第 $n$ 群に $n$ 個の数が入るような群に分けた時,  
各群の最初の数を並べた数列の階差数列の第 $n$ 項は,  $dn$ と表せる.  
(もとの数列の初項の値は影響しない.)

<sup>1</sup>一般の場合の証明は, <https://gleamath.com/group-of-sequence01/> を参照