問題. 初項が 1，公差が 5 の等差数列を，次のような群に分ける．ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする．

$$\underbrace{1}_{\text{第 }1\text{ 群}} \;\Big|\; \underbrace{6\ ,\ 11}_{\text{第 }2\text{ 群}} \;\Big|\; \underbrace{16\ ,\ 21\ ,\ 26}_{\text{第 }3\text{ 群}} \;\Big|\; \underbrace{31\ ,\ 36\ ,\ 41\ ,\ 46}_{\text{第 }4\text{ 群}} \;\Big|\; \underbrace{51\ ,\ 56}_{\cdots}\ ,\ \cdots$$

このとき，各群の最初の数を並べた数列

$$1,\ 6,\ 16,\ 31,\ 51,\ \cdots$$

の<u>階差数列の一般項</u>を求めよ．

群数列と階差数列

問題. 初項が1，公差が5の等差数列を，次のような群に分ける．ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする．

$$\underbrace{1}_{\text{第1群}} \;\Big|\; \underbrace{6\ ,\ 11}_{\text{第2群}} \;\Big|\; \underbrace{16\ ,\ 21\ ,\ 26}_{\text{第3群}} \;\Big|\; \underbrace{31\ ,\ 36\ ,\ 41\ ,\ 46}_{\text{第4群}} \;\Big|\; \underbrace{51\ ,\ 56\ ,\ \cdots}_{\cdots}$$

このとき，各群の最初の数を並べた数列

$$1,\ 6,\ 16,\ 31,\ 51,\ \cdots$$

の階差数列の一般項を求めよ．

解答. 初項1，公差5の等差数列を $\{a_n\}$ とすると，その一般項は，

$$a_n = 1 + 5(n-1) = 5n - 4 \tag{1}$$

と表せる．第 n 群には n 個の数が入るという仮定から，$n \geqq 2$ に対して，第 $n-1$ 群の最後の数は，数列 $\{a_n\}$ の第

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

項の数であり，これから，第 n 群の最初の数は，数列 $\{a_n\}$ の第

$$\frac{1}{2}n(n-1) + 1$$

項の数である．これは，$n=1$ の時も成り立つ．よって，(1) から，第 n 群の最初の数は，

$$5\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\} - 4 = \frac{5}{2}n(n-1) + 1 \tag{2}$$

と表せる．

各群の最初の数を並べた数列を $\{b_n\}$ とすると，(2) から，その一般項は，

$$b_n = \frac{5}{2}n(n-1) + 1$$

である．この数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると，

$$c_n = b_{n+1} - b_n = \left\{\frac{5}{2}(n+1)n + 1\right\} - \left\{\frac{5}{2}n(n-1)+1\right\} = 5n$$

が成り立つ．これが求める一般項である． □

一般に次が成り立つ[1]：

> 公差が d の等差数列を，第 n 群に n 個の数が入るような群に分けた時，
> 各群の最初の数を並べた数列の階差数列の第 n 項は，dn と表せる．
> （もとの数列の初項の値は影響しない．）

[1] 一般の場合の証明は，https://gleamath.com/group-of-sequence01/ を参照