表現される関手（Hom 関手）

C を圏[1]とする．C の対象 A, B に対して，A から B への射 $A \to B$ 全体の集合を $\mathrm{Hom}_C(A, B)$ で表す．圏 C の逆転圏を C^{op} で表す．集合全体のなす圏を $\mathbf{Set}$ で表す．次のようにして，圏 C から圏 $\mathbf{Set}$ への 2 つの関手が定まる．

命題. C を圏とし，A を C の対象とする．

- C の対象 X に対し，$h_A(X) = \mathrm{Hom}_C(X, A)$ とおき，C の射 $f : X \to Y$ に対し，
$$h_A(f) : h_A(Y) = \mathrm{Hom}_C(Y, A) \to h_A(X) = \mathrm{Hom}_C(X, A)\ ;\ g \mapsto g \circ f$$
とおく．このとき，反変関手 $h_A : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が定まる．
- C の対象 X に対し，$h^A(X) = \mathrm{Hom}_C(A, X)$ とおき，C の射 $f : X \to Y$ に対し，
$$h^A(f) : h^A(X) = \mathrm{Hom}_C(A, X) \to h^A(Y) = \mathrm{Hom}_C(A, Y)\ ;\ g \mapsto f \circ g$$
とおく．このとき，共変関手 $h^A : C \to \mathbf{Set}$ が定まる．

証明. • h_A が反変関手であることを示すには，次の 3 つが成り立つことを示せば良い．

1. C の射 $f : X \to Y$ に対して，写像（$\mathbf{Set}$ の射）$h_A(f) : h_A(Y) \to h_A(X)$ が定まる．
2. A の恒等射 $1_A : A \to A$ に対して，$h_A(1_A)$ は，$h_A(A)$ の恒等射 $1_{h_A(A)} : h_A(A) \to h_A(A)$ である．
3. $f : X \to Y, h : Y \to Z$ に対して，反変性 $h_A(h \circ f) = h_A(f) \circ h_A(h)$ が成り立つ．

これらは次のように示される．

1. h_A の定義から明らかである．
2. $h_A(A) = \mathrm{Hom}_C(A, A)$ である．任意の $g \in h_A(A)$ に対して，h_A の定義から，
$$h_A(1_A) : h_A(A) \to h_A(A)\ ;\ g \mapsto g \circ 1_A = g$$
が成り立つ．よって，$h_A(1_A) = 1_{h_A(A)}$ である．
3. $f : X \to Y, h : Y \to Z$ と，任意の $g \in h_A(A)$ に対して，
$$(h_A(f) \circ h_A(h))\,(g) = h_A(f)\,(g \circ h) = g \circ h \circ f = h_A(h \circ f)(g)$$
が成り立つ．よって，$h_A(h \circ f) = h_A(f) \circ h_A(h)$ である．

• h^A が共変関手であることを示すには，次の 3 つが成り立つことを示せば良い．

1. C の射 $f : X \to Y$ に対して，写像（$\mathbf{Set}$ の射）$h^A(f) : h^A(X) \to h^A(Y)$ が定まる．
2. A の恒等射 $1_A : A \to A$ に対して，$h^A(1_A)$ は，$h^A(A)$ の恒等射 $1_{h^A(A)} : h^A(A) \to h^A(A)$ である．
3. $f : X \to Y, h : Y \to Z$ に対して，共変性 $h^A(h \circ f) = h^A(h) \circ h^A(f)$ が成り立つ．

これらの証明は，上とほとんど同じなので省略する． □

定義. C を圏，A を C の対象とする．上の命題で定まる 2 つの関手
$$h_A : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set} \quad , \quad h^A : C \to \mathbf{Set}$$
を，A **によって表現される関手**という．

[1] 局所的に小さい圏すなわち，C の対象 A, B に対して，$\mathrm{Hom}_C(A, B)$ が集合となる圏