双曲線

定義. 平面上で，異なる２定点 F, F' からの距離の差が一定（$\neq 0$）である点 P の軌跡を**双曲線**という．２定点 F, F' をその双曲線の**焦点**という．ただし，差 $\mathrm{PF} - \mathrm{PF}'$ または $\mathrm{PF}' - \mathrm{PF}$（一定）は，２定点の距離 FF' より小さいとする．

双曲線の方程式その１

$c > 0$ とする．２定点 $\mathrm{F}(c, 0)$，$\mathrm{F}'(-c, 0)$ を焦点とし，この２定点からの距離の差が $2a$ である双曲線の方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

である．ただし，$c > a > 0$ であり，$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ とおいた．$(c > b)$

証明. 双曲線上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とする．$\mathrm{PF} - \mathrm{PF}' = 2a$ または，$\mathrm{PF}' - \mathrm{PF} = 2a$ をまとめて，$\pm(\mathrm{PF} - \mathrm{PF}') = 2a$ とかく．$\mathrm{PF} - \mathrm{PF}' = \pm 2a$ から，

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

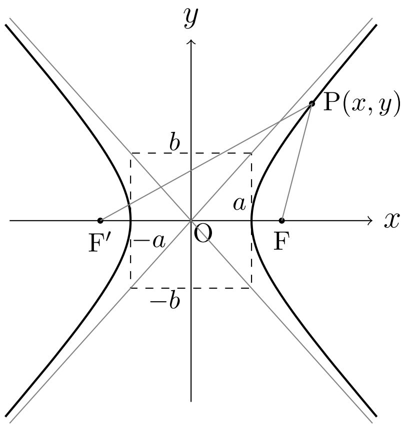
が成り立つ．$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ の両辺を２乗して整理することで，

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -(a^2 + cx)$$

を得が，再び，この両辺を２乗して整理し，

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

を得る．$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ から，$c^2 - a^2 = b^2$ とおき，両辺を a^2b^2 で割ることで，求める方程式を得る．
（仮定より，$a > 0$，$b > 0$ であることに注意する．）



□

注意. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ と x 軸との交点は，$(a, 0)$，$(-a, 0)$ である．これは双曲線の方程式に $y = 0$ を代入することで，$x^2 = a^2$ を得るが，これから従う．

双曲線の方程式その２

$c > 0$ とする．２定点 $\mathrm{F}(0, c)$，$\mathrm{F}'(0, -c)$ を焦点とし，この２定点からの距離の差が $2b$ である双曲線の方程式は，

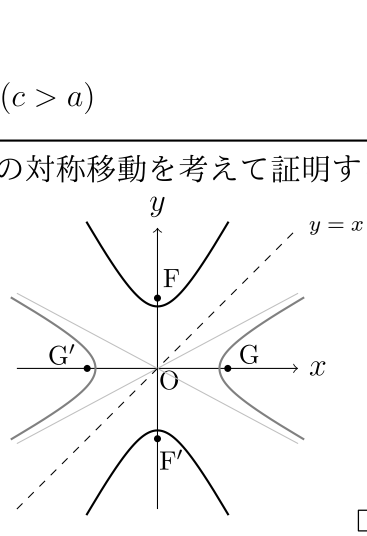
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

である．ただし，$c > b > 0$ であり，$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ とおいた．$(c > a)$

上と同様に証明できるが，ここでは x 軸上に焦点を持つ双曲線の対称移動を考えて証明する：
２定点 $\mathrm{G}(c, 0)$，$\mathrm{G}'(-c, 0)$ を焦点とし，この２定点からの距離の差が $2b$ である双曲線の方程式は，上の結果を用いると，

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \iff \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = -1$$

である．ここで，$c > b > 0$ であり，$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ とおいた．
求める双曲線は，この双曲線を直線 $y = x$ に関して対称移動させたものであるから，x と y の役割を入れ替えることで，結果が従う．（仮定より，$c > a > 0$ である．）



□

定義. 曲線が限りなくある直線に近づくとき，その直線を曲線の**漸近線**という．

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1\ (a>0, b>0)$ の漸近線は，次のようにして求められる：

上の方程式を変形し，$y^2=\dfrac{b^2}{a^2}x^2\left(1\mp\dfrac{a^2}{x^2}\right)$ を得るが，これから，$y=\pm\dfrac{b}{a}x\sqrt{1\mp\dfrac{a^2}{x^2}}$ が従う．

ここで，x が限りなく大きくなると，y は，$\pm\dfrac{b}{a}x$ に限りなく近づく．よって，2 直線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ が上の双曲線の漸近線である．これらは，次のようにまとめて書くこともできる．

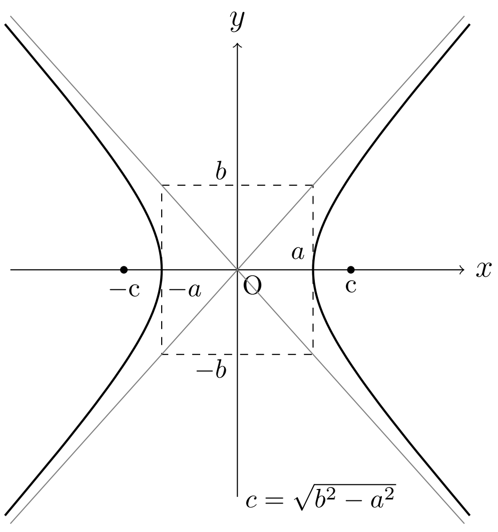
$$y=\pm\frac{b}{a}x \iff \left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\right)=0 \iff \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0 \iff \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

定義. 2 つの焦点を F, F' とする双曲線において，直線 FF' を**主軸**といい，主軸と双曲線の 2 つの交点を**頂点**という．また，線分 FF' の中点を双曲線の**中心**という．

双曲線の性質

$a>0$，$b>0$ とする．

- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



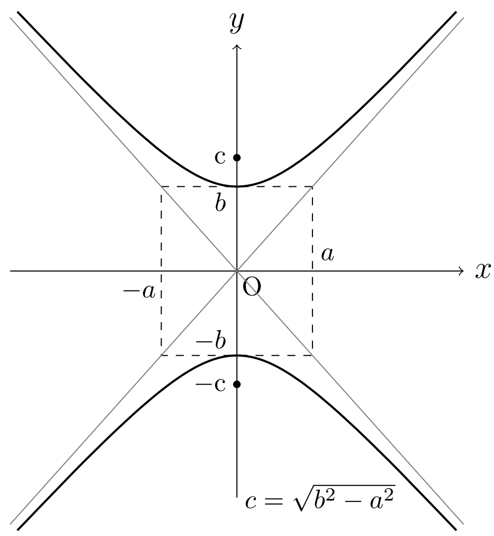
焦点　：x 軸上の 2 点 $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$

頂点　：x 軸上の 2 点 $(\pm a, 0)$

漸近線：2 直線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

距離の差：　$2a$

- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$



焦点　：y 軸上の 2 点 $(0, \pm\sqrt{a^2+b^2})$

頂点　：y 軸上の 2 点 $(0, \pm b)$

漸近線：2 直線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

距離の差：　$2b$

双曲線の平行移動も楕円の場合と同様に考えられる．

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$ を x 軸の正の方向に p，y 軸の正の方向に q だけ平行移動させた双曲線の方程式は次のようになる．

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=\pm 1$$