恒等式

定義. 有理式[1] $f(x), g(x)$ において，$f(x), g(x)$ の値が存在する全ての x に対して，等式

$$f(x) = g(x)$$

が成り立つとき，この等式を x に関する**恒等式**という．また，このとき，$f(x)$ と $g(x)$ は**恒等的に等しい**ともいう．

補足. 特定の値に対してのみ成り立つ等式のことは，**方程式**というのであった．

注意. 定義の「$f(x), g(x)$ の値が存在する全ての x に対して」という部分について，これは，「分数式の場合に，分母が 0 となる x 以外の x に対して」という意味である．（下の例を参照.）よって，整式で構成される恒等式に対しては，「全ての x に対して」と読み替えて問題ない．

例.

- 次のような等式は恒等式である．

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = x - 1$$

ただし，3 つ目の恒等式において，$x = 2$ については，左辺の値が存在しないので，$x \neq 2$ である全ての x について成り立つ恒等式である．

- 等式 $x^2 + 3x + 1 = 2x + 3$ は，$x = 1, -2$ に対してのみ成り立つ等式なので，方程式である．

整式で構成される恒等式の特徴付けを行うために，補題を 1 つ用意する．

補題. 整式 $f(x)$ に対して，次が成り立つ．

$$f(x) = 0 \text{ が恒等式．} \iff f(x) \text{ の各項の係数は全て } 0 \text{ である．}$$

証明. $(\Leftarrow)$ は明らかなので，$(\Rightarrow)$ を示す．

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

とおく．仮定より，n 個の相異なる定数 α_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）に対して，$f(\alpha_i) = 0$ が成り立つので，因数定理[2] から，$f(x)$ は，n 個の 1 次式 $x - \alpha_i$ を因数に持つ．よって，

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

と因数分解できる．さらに，α_i たちと異なる β に対しても，$f(\beta) = 0$ が成り立つので，

$$0 = f(\beta) = a_n (\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \cdots (\beta - \alpha_n)$$

が成り立つが，$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$\beta \neq \alpha_i$ なので，$a_n = 0$ でなければならない．よって，$f(x) = a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ となるが，同様の議論を繰り返すことにより，

$$a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$$

が従う． □

[1] 整式と分数式を合わせて有理式というのであった．
[2] 因数定理：1 次式 $x - a$ が整式 $P(x)$ の因数である $\iff P(a) = 0$.

整式の恒等式に関する次の特徴付けは重要である．

整式の恒等式

$f(x), g(x)$ を整式とする．このときは同値である．

1. $f(x) = g(x)$ が恒等式
2. $f(x)$ と $g(x)$ の次数が等しく，同じ次数の項の係数がそれぞれ等しい．
3. $f(x), g(x)$ の次数が n 次以下であるとき，互いに異なる $n+1$ 個の x の値に対して，$f(x) = g(x)$ が成り立つ．

証明. 整式 $f(x), g(x)$ の次数をそれぞれ，m, n とし，

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0, \qquad g(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$$

とおく．どちらでも同じなので，$m \leq n$ としておく．

- 2. $\Rightarrow$ 1.
  $m = n$　とし，$i = 0, 1, \cdots, n$ に対して，$a_i = b_i$ であると仮定すると，$f(x)$ と $g(x)$ は明らかに同じ整式である．よって，全ての x に対して，$f(x) = g(x)$ が成り立つ．

- 1. $\Rightarrow$ 3.
  $f(x) = g(x)$ が恒等式であると仮定すると，全ての x に対して，$f(x) = g(x)$ が成り立つ．よって，明らかに $n+1$ 個の x の値に対して，$f(x) = g(x)$ が成り立つ．

- 3. $\Rightarrow$ 2.
  $h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと，$h(x)$ の次数は n 次以下である．$f(x) = g(x)$ を満たす互いに異なる $n+1$ 個の x を，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ すると，$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$h(\alpha_i) = 0$ が成り立つので，因数定理より，$h(x)$ は，n 個の 1 次式 $x - \alpha_i$ を因数に持つ．よって，ある定数 c が存在して，
  $$h(x) = c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \tag{1}$$
  と因数分解できる．さらに，α_{n+1} に対しても，$h(\alpha_{n+1}) = 0$ が成り立つので，
  $$0 = h(\alpha_{n+1}) = c(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\cdots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$$
  が成り立つ．しかし，$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$\alpha_{n+1} \neq \alpha_i$ なので，$c = 0$ が従う．よって，等式 (1) から，$h(x) = 0$ が従う．これは x によらない等式である．言い換えれば，全ての x に対して，$h(x) = 0$ が成り立つので，これは恒等式である．

  $m < n$ であれば，$c = b_n = 0$ となってしまうので，$m = n$ でなければならない．よって，
  $$h(x) = g(x) - f(x) = (b_n - a_n)x^n + \cdots + (b_1 - a_1)x + (b_0 - a_0)$$
  と書けるが，今，$h(x) = 0$ は恒等式なので，上の補題から，$h(x)$ の各項の係数は全て 0 であることがわかる．以上より，$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$b_i - a_i = 0$ すなわち $a_i = b_i$ が従う．

以上より，3 つの主張は同値である．$\square$