問題. 次の等式が，x についての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ．

$$a(x-1)^2 + b(x-2) + c = 2x^2 + 3x - 4$$

係数比較法と数値代入法

問題. 次の等式が，x についての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ．

$$a(x-1)^2 + b(x-2) + c = 2x^2 + 3x - 4$$

解（係数比較法）. 左辺を展開して，等式

$$ax^2 + (-2a+b)x + (a-2b+c) = 2x^2 + 3x - 4 \tag{1}$$

を得る.

整式 $f(x), g(x)$ に対して，

$f(x) = g(x)$ が恒等式 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ と $g(x)$ の次数が等しく，同じ次数の項の係数がそれぞれ等しい.

が成り立つので，等式 (1) が恒等式であるためには，同じ次数の項の係数がそれぞれ等しいことが必要十分である．よって，等式 (1) の両辺の係数を比較して得られる連立方程式

$$\begin{cases} a &= 2 \\ -2a+b &= 3 \\ a-2b+c &= -4 \end{cases}$$

を解いて，

$$a = 2, \qquad b = 7, \qquad c = 8$$

を得る. □

....

解（数値代入法）. 与えられた等式の両辺は，二次式なので，互いに異なる 3 つの x に対して，等号がなり立てば恒等式である.

n 次式 $f(x), g(x)$ に対して，

$f(x) = g(x)$ が恒等式 $\Longleftrightarrow$ 互いに異なる $n+1$ 個の x の値に対して，$f(x) = g(x)$ が成り立つ.

よって，$x = 0, 1, 2$ に対して，等式が成り立つような a, b, c の値を求めればよい.

$$f(x) = a(x-1)^2 + b(x-2) + c - (2x^2 + 3x - 4)$$

とおくと，

$$f(0) = a - 2b + c + 4, \qquad f(1) = -b + c - 1, \qquad f(2) = a + c - 10$$

となるので，連立方程式

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 0 \\ f(2) &= 0 \end{cases}$$

を解いて，

$$a = 2, \qquad b = 7, \qquad c = 8$$

を得る.

□