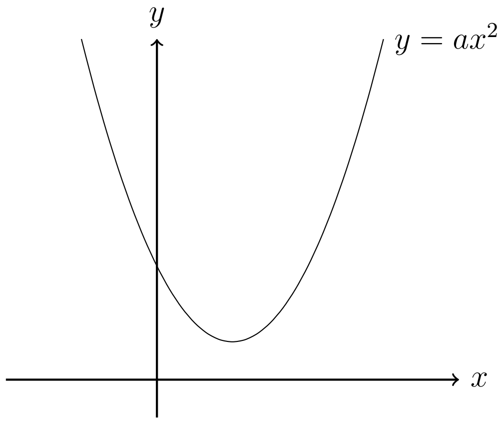
虚数解を図示する

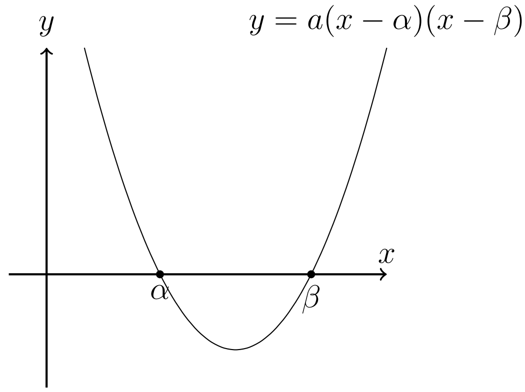
本稿の動機は，二次方程式の虚数解を図示することである．

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ とする．実数から実数への関数[1] $y=f(x)$ を考える．

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \quad ; \quad x\mapsto y=f(x) \tag{1}$$

この場合，定義域を x 軸，値域を y 軸にとることで，平面に，$y=f(x)$ のグラフを描くことができるのであった．





$f(x)=ax^2+bx+c$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とする．$D>0$ であれば，二次方程式 $f(x)=0$ は，異なる 2 つの実数解を持ち，それらを α，β とすると，

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と書ける．さらに，二次方程式 $f(x)=0$ の解 α，β は，二次関数 $y=f(x)$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標として，解釈することもできるのであった．（右図）

また，$D<0$ であれば，二次方程式 $f(x)=0$ は実数解を持たないため，二次関数 $y=f(x)$ のグラフは，x 軸と共有点を持たないグラフである．このように，(1) 式のような実数から実数への関数については，定義域 $\mathbb{R}$ と値域 $\mathbb{R}$ を合わせた平面 $\mathbb{R}^2$ を用いて，関数とグラフを対応させて考えることができるのであった．

複素数 $x_1+ix_2\in\mathbb{C}$ は，

$$\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^2 \quad ; \quad x_1+ix_2\mapsto(x_1,x_2)$$

という対応により，平面上の点 (x_1,x_2) として表すことができたことを思い出す．

複素数から複素数への関数については，上と同様に，定義域 $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ と値域 $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ を合わせた 4 次元空間 $\mathbb{C}^2\cong\mathbb{R}^4$ を用いて，関数に対応するグラフを考えることができない[2]．しかし，表題のように，虚数解を図示したいだけであれば，値域が $\mathbb{R}$ となるように定義域を制限して考えれば十分である．$f(x)$ に対して，$\mathbb{C}$ の部分集合 A_f を

$$A_f:=\{x\in\mathbb{C}\mid f(x)\in\mathbb{R}\}$$

と定める．このように制限すれば，定義域 A_f と値域 $\mathbb{R}$ を合わせた，空間 $\mathbb{R}^3$ を用いて，関数とグラフを対応させて考えることができる．

[1] 定義域を実数とすると，実係数なので，値域も実数である．高校数学では通常，このような関数しか扱わない．

[2]「高校数学の範囲では考えることができない．」もしくは「イメージしづらい」の意味．

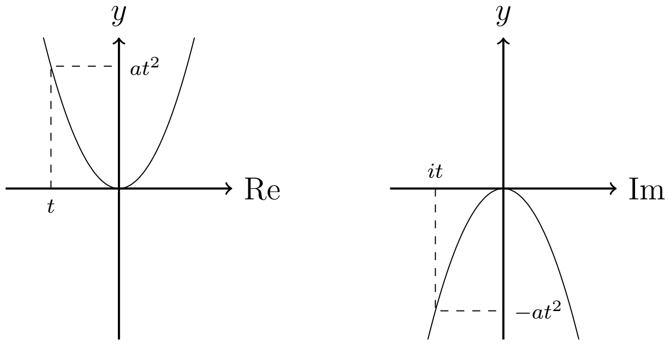
まず，$f_0(x) = ax^2$ $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ として，関数

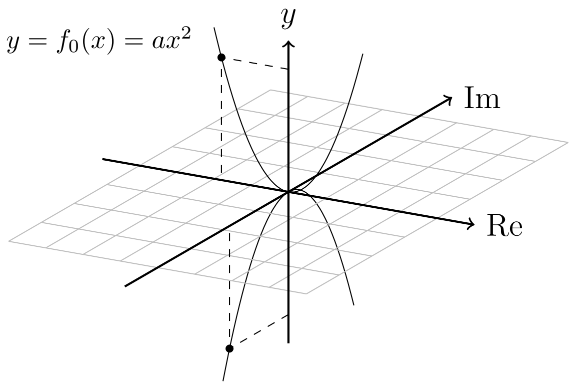
$$f_0 : A_{f_0} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x = x_1 + ix_2 \mapsto y = f_0(x) \tag{2}$$

を考える．$x = x_1 + ix_2$ に対して，$y = f_0(x) = a(x_1 + ix_2)^2 = a\{(x_1^2 - x_2^2) + 2ix_1x_2\}$ なので，$y = f_0(x) \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件は $x_1 = 0$ または，$x_2 = 0$ である．よって，A_{f_0} は，実数全体と純虚数全体を合わせた集合である．言い換えると，複素数平面において，A_{f_0} は，実軸上と虚軸上の全ての点の集合である．
実数 t に対して，純虚数 it の像は，

$$f_0(it) = a(it)^2 = -at^2 = -f_0(t)$$

と計算できることから，$y = f_0(x)$ のグラフは，右の 2 つのグラフを合わせたものになる．ただし，実軸 (Re) と，虚軸 (Im) は，A_{f_0} の実軸と虚軸であり，これらは，$\mathbb{C}$ 平面において，直交していることに注意する．すなわち，$y = f_0(x)$ のグラフは，次のように描画できる．





一般形を考える．$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ として，関数

$$f : A_f \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x = x_1 + ix_2 \mapsto y = f(x) \tag{3}$$

を考える．$D = b^2 - 4ac$ とすると，

$f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-D}{4a}$ と書けるので，$y = f(x)$ のグラフは，$y = f_0(x)$ のグラフを平行移動したものである．
$D < 0$ を仮定すると，二次方程式 $f(x) = 0$ は，互いに共役な 2 つの虚数解を持つ．これらを α，$\overline{\alpha}$ とすると，

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad , \quad \overline{\alpha} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

と書ける．さらに，2 つの解は $y = f(x)$ のグラフと平面 $\mathbb{C}$ との共有点と解釈することができる．（右図）