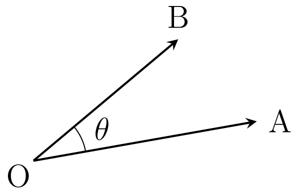
## ベクトルの内積




**定義.** $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ に対して，始点を 1 点 O に合わせたとき，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ の終点をそれぞれ A，B とする．このとき，$\angle \mathrm{AOB} = \theta \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ の**なす角**という．

**定義.** $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ のなす角が $\theta$ であるとする．このとき，

$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

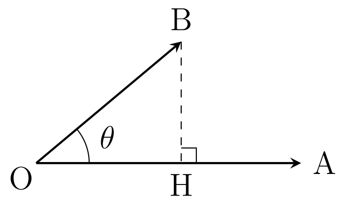
を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の**内積**といい，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ と表す．

**定義.** 任意のベクトルと $\overrightarrow{0}$ の内積は 0 と定義する．すなわち，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{a} = 0$ と定める．

**注意.** ベクトルの内積は，その定義から（ベクトルではなく）実数であることに注意する．

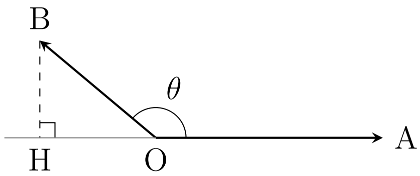
内積の図形的な意味を考える．
$\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$$




であった．ここで，点 B から，直線 OA に垂線を下ろし，その交点を H とすると，$\pm\mathrm{OH} = \mathrm{OB}\cos\theta$ が成り立つ．よって，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \mathrm{OA}\cdot(\pm\mathrm{OH})$$




がしたがう．以上から，（すぐ後に定義する正射影ベクトルという言葉を用いると，）内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は，

　$\overrightarrow{a}$ と，$\overrightarrow{b}$ の $\overrightarrow{a}$ への正射影ベクトルの符号付き長さの積

と考えられる．

**定義.** 上のように作った，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のことを，$\overrightarrow{b}$ の**直線 OA 上への正射影**や，$\overrightarrow{b}$ の $\overrightarrow{a}$ **への正射影ベクトル**などという．

定義からほとんど明らかであるが，内積の性質についてまとめておく．

**命題.** $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ について，次が成り立つ．

- $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行 $\iff \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \pm|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$
- $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が垂直 $\iff \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 0$

証明. $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を $\theta$ とする．

- $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行であると仮定する．同じ向きなら，$\cos\theta = \cos 0^\circ = 1$ なので，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ が成り立ち，反対向きなら，$\cos\theta = \cos 180^\circ = -1$ なので，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = -|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ が成り立つ．逆もほとんど同様に示される．
- $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が垂直であると仮定する．$\cos\theta = \cos 90^\circ = 0$ なので，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 0$ が従う．逆も同様である．

□

**内積と成分**

**定理．** 2つのベクトル $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ に対して，次が成り立つ．

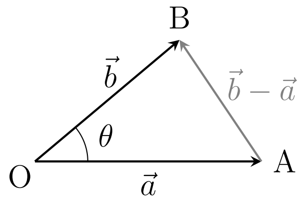
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

証明．まず，$\overrightarrow{0}=(0,0)$ なので，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ のどちらかが，$\overrightarrow{0}$ であるときは，明らかである．
$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ とする．右図のように

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\quad,\quad\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるように，点 A，B をとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$$




が成り立つ．
△AOB に対して，余弦定理を適用することで，等式

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta\\ |\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}|^2 &= |\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta\end{aligned}$$

を得る．ここで，ベクトルの成分表示と大きさの公式，$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ と，ベクトルの成分表示の差の公式，$\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$ に注意すると，上の等式は，

$$\begin{aligned}(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2 &= a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta\\ |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta &= a_1b_1+a_2b_2\end{aligned}$$

と計算できる．内積の定義から結果が従う． □

**内積の計算法則**

- $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$ 〔交換法則〕
- $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\pm\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\pm\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ 〔分配法則〕
- $(k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(k\overrightarrow{b})=k(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$ $(k\in\mathbb{R})$

証明．交換法則は，内積の定義から明らかである．

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ の成分表示をそれぞれ，$(a_1,a_2)$，$(b_1,b_2)$，$(c_1,c_2)$ とする．$\overrightarrow{b}\pm\overrightarrow{c}=(b_1\pm c_1,b_2\pm c_2)$ なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\pm\overrightarrow{c}) &= a_1(b_1\pm c_1)+a_2(b_2\pm c_2)\\ &= a_1b_1+a_2b_2\pm(a_1c_1+a_2c_2) = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\pm\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\end{aligned}$$

が成り立つ．

3つめの主張については，どの内積の値も，$ka_1b_1+ka_2b_2$ であることから従う． □

最後に，これまでの結果をまとめておく．

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2\quad,\quad\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$