内積と直線

本稿では「内積が一定」ということについて考察する．正確には，次のようなことを考える：

> 原点を O とする座標平面上に定点 $\mathrm{A}(a,b)$ をとる．ある定数 c があり，点 P が，
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-c$$
>
> を満たしながら動くとき，点 P の軌跡の方程式は，次の通りである．
>
> $$ax+by+c=0$$

証明．動点の座標を $\mathrm{P}(x,y)$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,b)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,y)$ と成分表示できるので，仮定より，

$$-c=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,b)\cdot(x,y)=ax+by$$

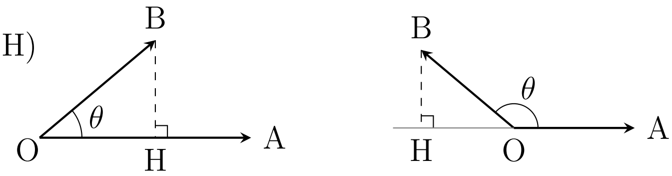
が成り立つ．以上から，軌跡の方程式 $ax+by+c=0$ を得る． □

　このように計算はとても簡単だが，点 $\mathrm{A}(a,b)$ と定数 c に対して，直線がどのようになっているかをイメージすることが大切である．そのために，正射影ベクトルについて復習する．

定義． $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対して，点 B から，直線 OA に垂線を下ろし，その交点を H とする．このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のことを，**$\vec{b}$ の直線 OA 上への正射影**や，**$\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトル**などという．
内積の定義から

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\mathrm{OA}{\cdot}\mathrm{OB}\cos\theta=\mathrm{OA}{\cdot}(\pm\mathrm{OH})$$

が成り立つので，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，
「$\vec{a}$ と，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトルの符号付き長さの積」と考えられるのであった．



　それでは，本題に戻ろう．内積が一定であることを表す等式

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-c$$

は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の直線 OA 上への正射影が一定である．と解釈することができる．
正射影ベクトルが OH となるような，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を全て考えると，点 P は，直線 OA に垂直な直線上に並ぶことが分かる．この直線が，直線 $ax+by+c=0$ である．さらに，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH}=|c|$ が成り立っていることに注意すると，点 H の位置は，原点 O からみて，

$$\begin{cases}-c>0\,\text{のとき，} & \text{点 A と同じ側，}\\ -c<0\,\text{のとき，} & \text{点 A と反対側，}\end{cases}$$

であって，

$$\mathrm{OH}=\frac{|\,c\,|}{\mathrm{OA}}$$

が成り立つ点である．（右図は $-c>0$ の場合）