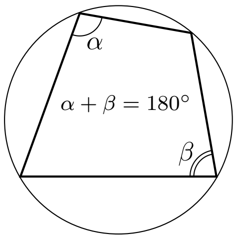
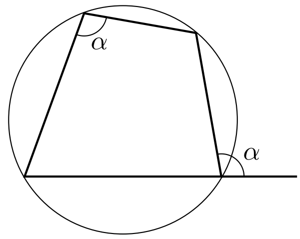
円に内接する四角形

円に内接する四角形の性質

定理. ある円に四角形が内接しているとき，次が成り立つ.

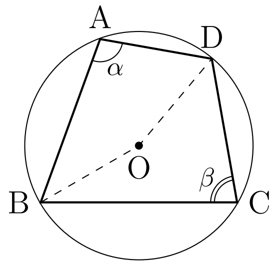
- 四角形の対角の和は，$180°$ である.
- 四角形の内角は，その対角の外角に等しい.





証明. ２つ目の主張は，１つ目の主張から明らかにしたがうので，１つ目の主張を証明する.

右図のようにある円に四角形 ABCD が内接しているとする. $\angle \mathrm{A}=\alpha$，$\angle \mathrm{C}=\beta$ とする．円周角の定理から，弧 BCD に対する中心角は 2α であり，弧 BAD に対する中心角は 2β である．$2\alpha+2\beta=360°$ から，$\alpha+\beta=180°$ がしたがう.



□

次に，この定理の逆も成り立つことを証明する.

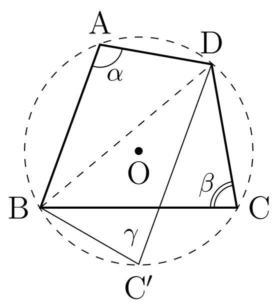
四角形が円に内接するための条件（上の定理の逆）

定理. 四角形が次のどちらかの条件を満たしているとき，その四角形は円に内接している.

- 四角形の１組の対角の和は，$180°$ である.
- 四角形の１つの内角は，その対角の外角に等しい.

証明. ２つ目の条件が成り立っているとき，明らかに１つ目の条件も成り立っているので，１つ目の条件が成り立っている場合を証明すれば十分である.

$\angle \mathrm{A}=\alpha$，$\angle \mathrm{C}=\beta$ として，$\alpha+\beta=180°$ が成り立っているとする．$\triangle \mathrm{ABD}$ の外接円を考える.（三角形の外接円は必ず存在する.）直線 BD に対して，点 A と反対側にある円周上の点を１つとり，それを C' とし，$\angle \mathrm{C}'=\gamma$ とすると，上の定理から，$\alpha+\gamma=180°$ が成り立つ．よって仮定と合わせて，$\beta=\gamma$ を得る．円周角の定理の逆を用いて，４点 $\mathrm{B}, \mathrm{D}, \mathrm{C}, \mathrm{C}'$ は同一円周上にある事がわかるが，その円は，$\triangle \mathrm{ABD}$ の外接円であり，四角形 ABCD は，この円に内接している事がわかる.



□