## 部分積分法

被積分関数がある 2 つの関数の積の形である場合，部分的に積分できるというのが，次の部分積分法である．

**部分積分法**

**命題．** $f(x)$, $g(x)$ は微分可能関数でその導関数が連続関数であるものとする．このとき，次が成り立つ．

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx. \tag{1}$$

証明．$f(x)g(x)$ の導関数は，積の導関数の公式[1] から，

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

と計算できる．よって，$f(x)g(x)$ は，関数 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ の原始関数のうちの 1 つである．よって不定積分は，積分定数 $C$ を用いて，

$$\int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}\,dx = f(x)g(x) + C$$

と表される．さらに左辺は，積分の線形性[2] から，

$$\int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

と計算できるので，これらを合わせて，

$$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + C$$

が成り立つ．この等式において，$\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx$ の項を移項する事で，公式 (1) が得られる．（積分定数 $C$ は移項した不定積分に吸収された[3]．） □

部分積分の公式 (1) は，次のように見ることができる．

積分

$$\int f(x)g'(x)\,dx \quad = \quad f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

積分

よって，次のように書き換えても良い．

**部分積分法**

**命題．** $f(x)$ を微分可能関数でその導関数が連続関数であるものとし，$g(x)$ を連続関数でその原始関数のうちの 1 つを $G(x)$ とする．このとき，次が成り立つ．

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx. \tag{2}$$

[1] https://gleamath.com/derivative-formulas/

[2] https://gleamath.com/linearity-of-indefinite-integral/

[3] “原始関数 $+C$” の形の関数をまとめて不定積分と呼んでいたので，$\displaystyle\int h(x)\,dx + C = \int h(x)\,dx$ が成り立つ．

**注意.** 部分積分の公式 (2) が，$G(x)$ の取り方によらないことを示さなければならない．原始関数は定数の違いしかないので，$g(x)$ の原始関数は全て $G(x)+C$ の形で書けるのであった．よって，

$$\begin{aligned}
\int f(x)g(x)\,dx &= f(x)\{G(x)+C\} - \int f'(x)\{G(x)+C\}\,dx \\
&= f(x)G(x) + Cf(x) - \left\{\int f'(x)G(x)\,dx + C\int f'(x)\,dx\right\} \\
&= f(x)G(x) + Cf(x) - \int f'(x)G(x)\,dx - C(f(x)+D) \\
&= f(x)G(x) + Cf(x) - \int f'(x)G(x)\,dx - Cf(x) - CD \\
&= f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx
\end{aligned}$$

ここで，$D$ は積分定数であり，最後の等号において，定数 $-CD$ は，不定積分 $-\int f'(x)G(x)\,dx$ に吸収された（上の注釈[3]を参照）．

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**例.** 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \log x\,dx$

*解.* 以下で，$C$ は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

$$\begin{aligned}
&= xe^x - \int (x)'e^x\,dx \\
&= xe^x - \int e^x\,dx \\
&= xe^x + e^x + C
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

$$\begin{aligned}
&= x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx \\
&= x^2\sin x - 2\left\{x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx\right\} \\
&= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C
\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx$ とみて，部分積分法を適用する．

$$\begin{aligned}
\int \log x\,dx &= \int 1\cdot\log x\,dx \\
&= x\log x - \int x\cdot(\log x)'\,dx \\
&= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= x\log x - \int dx \\
&= x\log x - x + C
\end{aligned}$$

□

最後の結果は重要なので，改めて公式の形で示しておく．

**$\log x$ の不定積分**

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C$$