置換積分法

被積分関数が直接積分できないような関数である場合，次のようにして，被積分関数を置き換えることができる．

置換積分法

命題. $f(x)$ を連続関数とし，$x = g(t)$ を微分可能関数でその導関数が連続関数であるものとする．このとき，次が成り立つ．

$$\int f(x)\,dx = \int f\left(g(t)\right) g'(t)\,dt. \tag{1}$$

証明．$f(x)$ の原始関数のうちの 1 つを $F(x)$ とおくと，$f(x)$ の不定積分は，積分定数 C を用いて，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C = F(g(t)) + C \tag{2}$$

と表せる．ここで，$F(g(t)) + C$ は t の関数であることに注意する．$F(g(t))$ を t で微分すると，合成関数の微分法[1] から，

$$\{F(g(t))\}' \ = \ F'(g(t))g'(t) \ = \ f(g(t))g'(t)$$

が成り立つ．最後の等号は，$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であることから従う．よって，（t の関数）$\{F(g(t))\}'$ は，$f(g(t))g'(t)$ の原始関数のうちの 1 つなので，

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + C$$

と表せる．これと，(2) から，主張が従う． □

注意. ライプニッツの記法を思い出すと，$x = g(t)$ に対して，

$$g'(t) = \frac{dx}{dt} \tag{3}$$

と書けるのであった．ここで，右辺の $\dfrac{dx}{dt}$ は，分数ではなくて単なる記号であるが，これを

$$dx = g'(t)\,dt \tag{4}$$

と書くことにより（両辺に dt を掛けたように思える），置換積分法の公式 (1) は，左辺の x と dx にそれぞれ，$x = g(t)$ と，(4) を代入した形に思える．繰り返しになるが，$\dfrac{dx}{dt}$ は，単なる記号なので，上の操作は代入ではなく形式的に置き換えただけである．しかし，単なる記号として，(3) を (4) のように書くこともある．この点で，ライプニッツの記法は大変優れたものであると言える．

上の置換積分法の公式 (1) は，被積分関数を，$x = g(t)$ を経由して，$f(x)$ から $f(g(t))g'(t)$ に置換しているわけだが，逆に，被積分関数が，$f(g(x))g'(x)$ の形をしている場合には，公式 (1) の左辺と右辺の役割を入れ替えることにより，次のように被積分関数を置換することができる．

置換積分法

命題. $f(u)$ を連続関数とし，$u = g(x)$ を微分可能関数でその導関数が連続関数であるものとする．このとき，次が成り立つ．

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \tag{5}$$

[1] https://gleamath.com/derivative-composite-funcs/

置換積分のよく現れる形を公式としてまとめておく．

基本的な置換積分の公式

$f(u)$ を連続関数とし，その原始関数のうちの 1 つを $F(u)$ とする．$g(x)$ を微分可能関数でその導関数が連続関数であるものとする．このとき次が成り立つ．ただし，C は積分定数とする．

- $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (a \neq 0)$
- $\displaystyle\int \{g(x)\}^{\alpha}\,g'(x)\,dx = \frac{\{g(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \qquad (\alpha \neq -1)$
- $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|g(x)|+C$

証明．置換積分の公式 (5) を用いる．

- $u = g(x) = ax+b$ とおくと，$g'(x) = a$ であるので，

$$\begin{aligned}
&\int f(ax+b)\,dx \\
&= \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot a\,dx \\
&= \frac{1}{a}\int f(g(x))g'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{a}\int f(u)\,du \\
&= \frac{1}{a}F(u)+C \\
&= \frac{1}{a}F(ax+b)+C
\end{aligned}$$

と計算できる．

- $f(u) = u^{\alpha}$ とし，$u = g(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&\int \{g(x)\}^{\alpha}\,g'(x)\,dx \\
&= \int f(g(x))\,g'(x)\,dx \\
&= \int f(u)\,du \\
&= \int u^{\alpha}\,du \\
&= \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \\
&= \frac{\{g(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C
\end{aligned}$$

と計算できる．

- $f(u) = \dfrac{1}{u}$ とし，$u = g(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx \\
&= \int f(g(x))\,g'(x)\,dx \\
&= \int f(u)\,du \\
&= \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \log|u|+C \\
&= \log|g(x)|+C
\end{aligned}$$

と計算できる．

□

例． 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin(5x+4)\,dx$ (2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{2}{3x-1}\,dx$

解．以下で，C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int \sin(5x+4)\,dx = \frac{1}{5}\int (5x+4)'\cdot\sin(5x+4)\,dx = -\frac{1}{5}\cos(5x+4)+C$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)'\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{2}{3x-1}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{(3x-1)'}{3x-1}\,dx = \frac{2}{3}\log|3x-1|+C$

□