三角比の性質

三角比の相互関係

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である θ の三角比について，次が成り立つ．

(i) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (\theta \neq 90^\circ)$

(ii) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

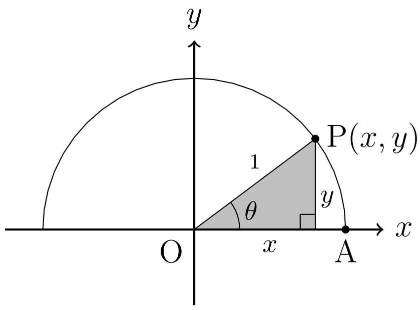
(iii) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \qquad (\theta \neq 90^\circ)$

証明．三角比の定義を思い出そう．右の図のように，
$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である θ に対して，

$$\sin\theta = y \quad , \qquad \cos\theta = x \quad , \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定めるのであった．定義から，

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



が成り立つ．よって等式 (i) を得た．

次に，色付きの直角三角形において，三平方の定理から，$y^2 + x^2 = 1$ が成り立つ．この式と，三角比の定義から，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ がしたがう．よって等式 (ii) を得た．

最後に，等式よって等式 (ii) の両辺を $\cos^2\theta$ $(\theta \neq 90^\circ)$ で割ることにより，

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\ \tan^2\theta + 1 &= \frac{1}{\cos^2\theta} \end{aligned}$$

となり，よって等式 (iii) を得る． □

注意． $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ に対して，$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ のうち，１つの値がわかっていれば，上の相互関係を用いて，残りの２つの三角比の値を求める事ができる．これは，１つの三角比がわかっていれば，対応する直角三角形が決まるので，当たり前のことである．

- $\sin\theta = \alpha$ とする．このとき，相互関係 (ii) から，$\cos\theta = \sqrt{1-\alpha^2}$ を得る．（θ の範囲から，$\cos\theta$ が一つに決まることに注意する．）さらに，相互関係 (i) から，$\tan\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ を得る．
- $\cos\theta = \beta$ とする．このとき，相互関係 (ii) から，$\sin\theta = \sqrt{1-\beta^2}$ を得る．さらに，相互関係 (i) から，$\tan\theta = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$ を得る．
- $\tan\theta = \gamma$ とする．このとき，相互関係 (iii) から，$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ を得る．さらに，相互関係 (i) から，$\sin\theta = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ を得る．

$90° - \theta,\ 90° + \theta,\ 180° - \theta$ の三角比

次が成り立つ．ただし，$\tan\varphi$ については，$\varphi \neq 90°$ とする．

(i) $90° - \theta$

- $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$
- $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$(0° < \theta < 90°)$

(ii) $90° - \theta$

- $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$
- $\tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

$(0° \leq \theta \leq 90°)$

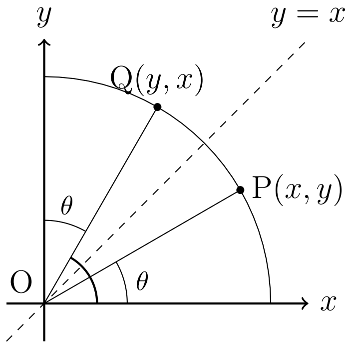
(iii) $90° - \theta$

- $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

$(0° \leq \theta \leq 180°)$

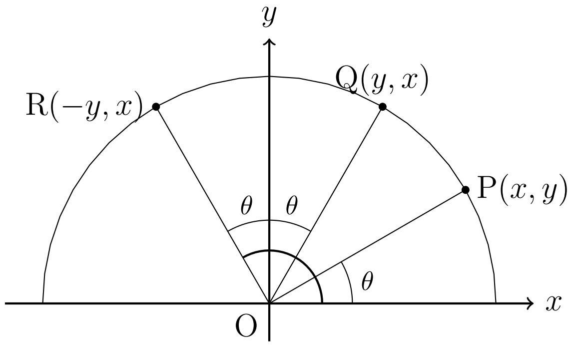
証明． (i)

θ に対応する点を $\mathrm{P}(x, y)$ とし，$90° - \theta$ に対応する点を Q とすると，P, Q は，直線 $y = x$ について対称である．よって，P の x 座標と，Q の y 座標は等しく，P の y 座標と，Q の x 座標は等しい．よって求める等式を得る．



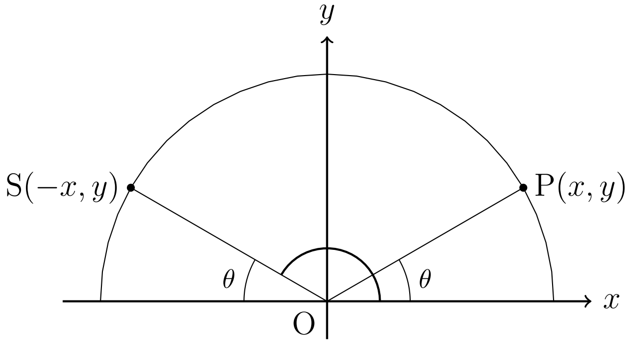
(ii)

θ に対応する点を $\mathrm{P}(x, y)$ とし，$90° + \theta$ に対応する点を R とすると，点 R は，(i) でとった点 Q と y 軸に関して対称である．よって，P の x 座標と，R の y 座標は等しく，P の y 座標の -1 倍と，R の x 座標は等しい．よって求める等式を得る．



(iii)

θ に対応する点を $\mathrm{P}(x, y)$ とし，$180° - \theta$ に対応する点を S とすると，点 S は，点 P と y 軸に関して対称である．よって，P の x 座標の -1 倍と，S の x 座標は等しく，P の y 座標と，S の y 座標は等しい．よって求める等式を得る．



□